

Lý thuyết Mạch 2

Mạch tuyến tính quá độ – Mạch phi tuyến – Đường dây dài | EE2022

Nguyễn Bảo Huy
huy.nguyenbao@hust.edu.vn

Khoa Tự động hoá, Trường Điện - Điện tử
Đại học Bách Khoa Hà Nội

Hà Nội, 2026



- Một bài kiểm tra giữa kỳ
- Một bài thi cuối kỳ
- Cấu trúc đề thi: 9 điểm làm bài và 1 điểm trình bày
- Được sử dụng tài liệu là 1 tờ giấy A4
- Cộng điểm quá trình (điểm quá trình tối đa: 10 điểm)
 - Giải bài tập trên lớp, thảo luận trên lớp: **cộng từ 0 đến 2 điểm** (làm bài sai, phát biểu sai không bị trừ điểm)
- Nội quy lớp học
 - Không điểm danh, không tính điểm chuyên cần
 - Ra vào tùy ý, yên lặng (không xin phép)
 - Không làm ồn, không gây mất tập trung
 - Mỗi lần nhắc trật tự: **trừ cả lớp 0.25 điểm** vào điểm quá trình
- Khi có yêu cầu từ giảng viên hoặc nhóm chuyên môn, sinh viên có nghĩa vụ làm rõ lại các nội dung đã thực hiện và giải trình các vấn đề trong bài thi

Để học tốt môn Lý thuyết Mạch



1. Làm bài tập
2. Làm bài tập
3. Nếu chưa làm bài tập xem lại hai điều trên
 - Nguồn bài tập
 - Các ví dụ trên lớp
 - Các bài tập về nhà
 - Các đề thi cũ
 - Các tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Bình Thành, Nguyễn Thế Thắng, Lê Văn Bảng, Phương Xuân Nhàn *Cơ sở Kỹ thuật Điện – Tập III – Cơ sở Lý thuyết Mạch – Quyển II: Mạch phi tuyến. Quá trình quá độ. Mạch thông số rải.*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1972.
2. Phạm Văn Bình, Đào Lê Thu Thảo, Nguyễn Hữu Phát, *Lý thuyết Mạch*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2022.
3. Charles K. Alexander, Matthew N. O. Sadiku, *Fundamentals of Electric Circuits*, McGraw-Hill, 2021.
4. James Nilsson, Susan Riedel, *Electric Circuits*, 11th, Pearson, 2020.
5. Leon Chua, Charles Desoer, Ernest Kuh, *Linear and Nonlinear Circuits*, McGraw-Hill, 1987.
6. John J. Grainger, WUliam D. Stevenson, *Power System Analysis*, McGraw-Hill, 1994. (Chapters 4, 5, 6 on Transmission Lines)
7. William H. Hayt, John A. Buck, *Engineering Electromagnetics*, 9th, McGraw-Hill, 2018. (Chapter 10: Transmission Lines)

Vị trí của môn Lý thuyết Mạch 2



- Kiến thức đại cương và cơ sở ngành
 - Phương trình vi phân
 - Phương pháp tính
 - Tín hiệu và hệ thống
 - Lý thuyết Mạch 1
- **Lý thuyết Mạch 2** $\Leftrightarrow$ Lý thuyết điều khiển tự động
- Kiến thức chuyên ngành
 - Điện tử tương tự
 - Máy điện
 - Điện tử công suất
 - Truyền động điện
 - Lưới điện
 - v.v.

Lý thuyết Mạch 1

1. Mạch tuyến tính ở chế độ xác lập

Lý thuyết Mạch 2

2. Mạch tuyến tính ở chế độ quá độ
3. Mạch phi tuyến (xác lập và quá độ)
4. Đường dây dài (xác lập và quá độ)

LT Mạch 2: Quá độ – Phi tuyến – Đường dây dài



- 1 Mạch tuyến tính ở chế độ quá độ
 - Hiện tượng quá độ, mô hình trạng thái, và sơ kiện
 - Phương pháp tích phân kinh điển
 - Phương pháp toán tử Laplace
- 2 Mạch phi tuyến
 - Khái niệm mạch phi tuyến
 - Mạch phi tuyến xác lập một chiều
 - Mạch phi tuyến xác lập điều hoà
 - Mạch phi tuyến xác lập biến thiên tín hiệu nhỏ
 - Mạch phi tuyến ở chế độ quá độ
- 3 Đường dây dài
 - Khái niệm đường dây dài: mạch có thông số rải
 - Đường dây dài ở chế độ xác lập: truyền công suất
 - Đường dây dài ở chế độ quá độ: truyền sóng

LT Mạch 2: Quá độ – Phi tuyến – Đường dây dài

1 Mạch tuyến tính ở chế độ quá độ

- Hiện tượng quá độ, mô hình trạng thái, và sơ kiện
- Phương pháp tích phân kinh điển
- Phương pháp toán tử Laplace

2 Mạch phi tuyến

- Khái niệm mạch phi tuyến
- Mạch phi tuyến xác lập một chiều
- Mạch phi tuyến xác lập điều hoà
- Mạch phi tuyến xác lập biến thiên tín hiệu nhỏ
- Mạch phi tuyến ở chế độ quá độ

3 Đường dây dài

- Khái niệm đường dây dài: mạch có thông số rải
- Đường dây dài ở chế độ xác lập: truyền công suất
- Đường dây dài ở chế độ quá độ: truyền sóng



Nội dung

- 1 Mạch tuyến tính ở chế độ quá độ
 - Hiện tượng quá độ, mô hình trạng thái, và sơ kiện
 - Hiện tượng quá độ
 - Mô hình trạng thái
 - Sơ kiện
 - Phương pháp tích phân kinh điển
 - Tư tưởng của phương pháp
 - Nội dung của phương pháp
 - Phương pháp toán tử Laplace
 - Tư tưởng của phương pháp
 - Phép biến đổi Laplace
 - Ảnh Laplace của mạch
 - Giải mạch tuyến tính quá độ bằng toán tử Laplace



Hiện tượng quá độ trong mạch điện

- Trong Lý thuyết Mạch 1, ta xét mạch ở **chế độ xác lập**, gồm **trạng thái tĩnh** (một chiều) và **trạng thái dừng** (biến thiên tuần hoàn)
- Mạch điện có thể làm việc ở các trạng thái xác lập khác nhau ứng với mỗi cấu trúc mạch và/hoặc giá trị các phần tử khác nhau
- Việc **chuyển từ trạng thái xác lập này sang trạng thái xác lập khác** không diễn ra tức thời mà **cần một quá trình**
 - Về mặt vật lý: năng lượng trong các kho điện (tụ điện) và kho từ (cuộn cảm) không thay đổi tức thời mà cần thời gian phóng-nạp; ta nói các phần tử này có **“quán tính”**
 - Về mặt toán học: quan hệ đặc trưng của các phần tử L và C là các phương trình vi phân $\rightarrow$ các biến cần tính đạo hàm (gọi là các **biến trạng thái**) phải **biến thiên liên tục theo thời gian**

$\Rightarrow$ Gọi là **quá trình quá độ***

*Tổng quát hơn: Trạng thái quá độ là khi mạch không ở trạng thái xác lập (Gardner and Barnes, *Transients in Linear Systems – Studied by the Laplace Transformation*, 1948.)

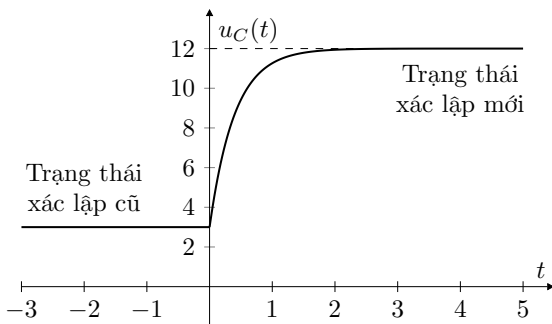
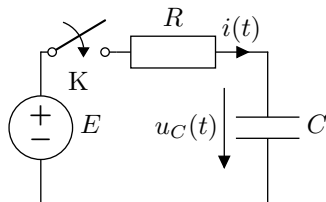


Hiện tượng quá độ trong mạch điện

Ví dụ 1.1: Xét mạch RC

- Tại thời điểm $t = 0$ khoá K đóng vào

- $E = 12\text{ V}$;
- $R = 4\ \Omega$;
- $C = 0,1\text{ F}$;
- $u_C(0) = 3\text{ V}$





Hiện tượng quá độ trong mạch điện

Mô tả hiện tượng quá độ

- Hiện tượng quá độ xảy ra có thể do sự cố hoặc chủ đích
 - Thay đổi cấu trúc mạch
 - Thay đổi giá trị các phần tử
- Trong Lý thuyết Mạch, ta mô tả hiện tượng quá độ bằng 2 cách
 1. Chuyển mạch (đóng mở) một **khoá lý tưởng** (thường gọi là khoá K)
 2. Dùng các **hàm suy biến**

Hàm bước nhảy Heaviside

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{khi } t > 0 \\ 0 & \text{khi } t \leq 0 \end{cases}$$

Hàm xung Dirac

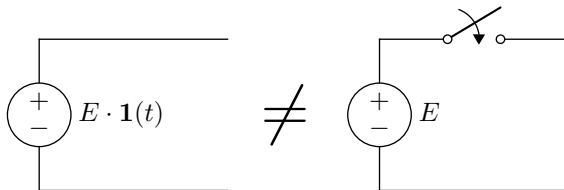
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{khi } t = 0 \\ 0 & \text{khi } t \neq 0 \end{cases} \quad \text{với } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

- Mối quan hệ giữa 2 hàm suy biến: $\delta(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{1}(t)$

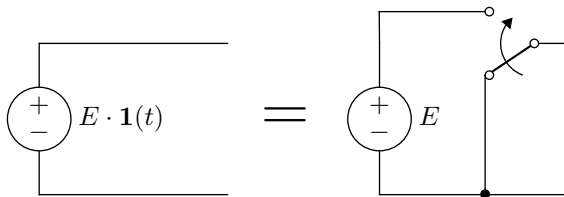


Hiện tượng quá độ trong mạch điện

Chú ý: Mô hình chuyển mạch của hàm $1(t)$ KHÔNG phải thế này



...mà là thế này





Mô hình mạch trong không gian trạng thái

Biến trạng thái

- Biến trạng thái của mạch điện là các dòng điện và điện áp mô tả trạng thái hoạt động của mạch
- Tập biến trạng thái là tập hợp đủ để xác định tất cả các tín hiệu trong mạch^a
- Khi mạch ở chế độ xác lập, biến trạng thái có thể là bất cứ dòng và áp *độc lập* nào trong mạch
- Khi mạch ở chế độ quá độ, ta *thường* chọn biến trạng thái là các **dòng điện độc lập** chạy qua các **cuộn dây** và các **điện áp độc lập** trên các **tụ điện**

^aNói theo ngôn ngữ đại số: tập biến trạng thái là cơ sở của không gian các tín hiệu trong mạch



Mô hình mạch trong không gian trạng thái

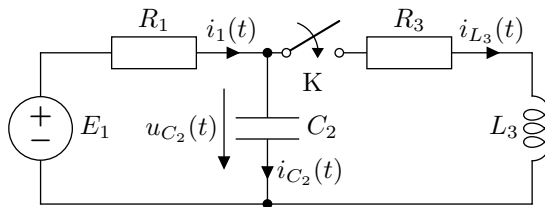
Hệ phương trình trạng thái

- Là **mô hình toán học** của mạch mô tả **quan hệ giữa biến trạng thái và biến đầu vào** là dòng và áp từ các nguồn độc lập
- Khi mạch có các phần tử kho điện và kho từ, hệ phương trình trạng thái là **hệ phương trình vi phân** theo các biến trạng thái
- Khi mạch ở chế độ xác lập, hệ phương trình vi phân *suy biến* thành hệ phương trình đại số với mạch một chiều hoặc được *đại số hoá* bằng ảnh phức phasor của mạch xoay chiều điều hoà
- Khi mạch ở chế độ quá độ, cần **giải phương trình vi phân** với các **điều kiện biên**, trong Lý thuyết Mạch gọi là **sơ kiện**



Mô hình mạch trong không gian trạng thái

Ví dụ 1.2: Hệ phương trình trạng thái



- Có 2 biến trạng thái: $u_{C_2}(t)$ và $i_{L_3}(t)$ (hệ bậc 2)
- Hệ phương trình Kirchhoff:

$$i_1(t) - i_{C_2}(t) - i_{L_3}(t) = 0$$

$$u_{R_1}(t) + u_{C_2}(t) - E_1 = 0$$

$$u_{R_3}(t) + u_{L_3}(t) - u_{C_2}(t) = 0$$



Mô hình mạch trong không gian trạng thái

Ví dụ 1.2: Hệ phương trình trạng thái

- Từ quan hệ đặc trưng của các phần tử

Tụ điện: $i_{C_2}(t) = C_2 \frac{du_{C_2}(t)}{dt}$

Cuộn dây: $u_{L_3}(t) = L_3 \frac{di_{L_3}(t)}{dt}$

Điện trở: $U_{R_1} = R_1 \cdot i_1(t)$

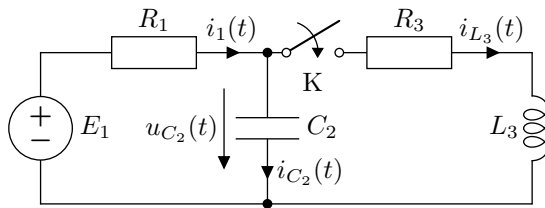
- Thay vào hệ phương trình Kirchhoff $\rightarrow$ hệ phương trình vi phân theo 2 biến trạng thái:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u_{C_2}(t) &= \frac{-1}{R_1 C_2}u_{C_2}(t) - \frac{1}{C_2}i_{L_3}(t) + \frac{1}{R_1 C_2}E_1 \\ \frac{d}{dt}i_{L_3}(t) &= \frac{1}{L_3}u_{C_2}(t) - \frac{R_3}{L_3}i_{L_3}(t) \end{aligned}$$



Mô hình mạch trong không gian trạng thái

Ví dụ 1.2: Hệ phương trình trạng thái



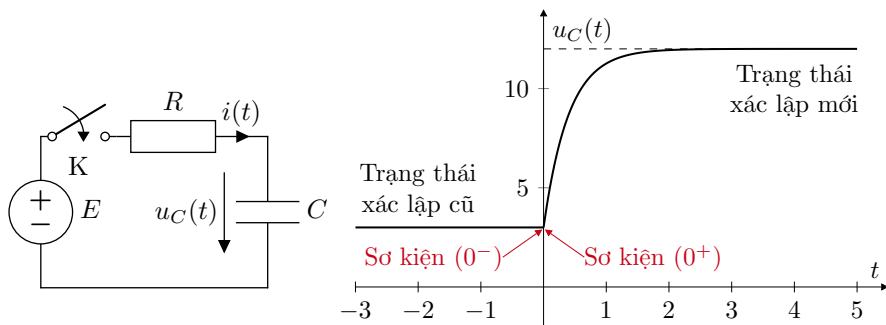
⇒ Dạng ma trận $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{C_2}(t) \\ i_{L_3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L_3} & -\frac{R_3}{L_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{C_2}(t) \\ i_{L_3}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_2} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot E_1$$



Sơ kiện

- Giải mạch quá độ là **giải hệ phương trình vi phân** → **họ nghiệm**
 ⇒ Để tính nghiệm duy nhất cần có **điều kiện biên**, trong Lý thuyết Mạch là **điều kiện đầu của các biến trạng thái** gọi là **sơ kiện**
- Do thao tác chuyển mạch khoá K, bài toán mạch có:
 - **Sơ kiện ngay trước chuyển mạch (0^-)**
 - **Sơ kiện ngay sau chuyển mạch (0^+)**

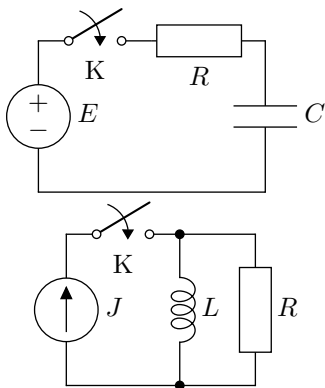




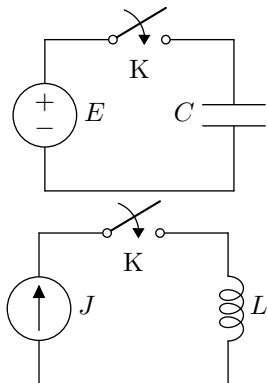
Sơ kiện

- Sơ kiện (0^+) và sơ kiện (0^-) có thể giống nhau hoặc khác nhau
 - Bài toán quá độ chỉnh:** Sơ kiện (0^+) = Sơ kiện (0^-)
 - Bài toán quá độ không chỉnh:** Sơ kiện (0^+) $\neq$ Sơ kiện (0^-)

• Chuyển mạch chỉnh



• Chuyển mạch không chỉnh





Sơ kiện

Chuyển mạch chỉnh

- Các biến trạng thái $u_C(t)$ và $i_L(t)$ biến thiên liên tục
 $\Rightarrow u_C(0^+) = u_C(0^-); i_L(0^+) = i_L(0^-)$
- Trong thực tế phải đảm bảo chuyển mạch chỉnh
- Tính sơ kiện từ các định luật Kirchhoff

Chuyển mạch không chỉnh

- Đặt cường bức một điện áp lên tụ điện hoặc cường bức một dòng điện qua cuộn dây $\rightarrow$ các biến trạng thái $u_C(t)$ và $i_L(t)$ biến thiên không liên tục ở thời điểm đóng mở $\rightarrow$ sơ kiện $(0^+) \neq$ sơ kiện (0^-)
- Trong thực tế cần tránh chuyển mạch không chỉnh (vì sao?)
- Tính sơ kiện từ các định luật Kirchhoff kết hợp với **định luật bảo toàn từ thông** và **định luật bảo toàn điện tích**



Sơ kiện

Định luật bảo toàn từ thông

- Tổng từ thông trong một vòng kín liên tục tại mọi thời điểm

$$\sum \Psi_k(0^-) = \sum \Psi_k(0^+)$$

Định luật bảo toàn điện tích

- Tổng điện tích tại một nút liên tục tại mọi thời điểm

$$\sum q_k(0^-) = \sum q_k(0^+)$$

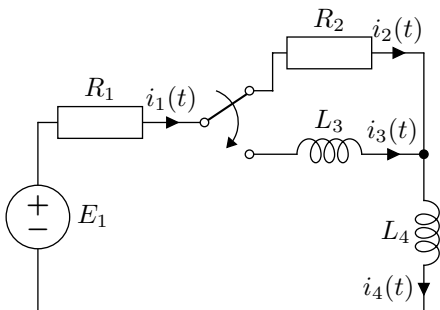
⚠ Chú ý: Định luật bảo toàn từ thông và định luật bảo toàn điện tích có **mức ưu tiên thấp hơn hai định luật Kirchhoff**

- Nghĩa là nếu hai định luật bảo toàn mâu thuẫn với hai định luật Kirchhoff thì phải **ưu tiên thỏa mãn các định luật Kirchhoff**



Sơ kiện

Ví dụ 1.3: Tính các sơ kiện theo định luật bảo toàn từ thông



- Ngay trước chuyển mạch:

$$i_3(0^-) = 0 \text{ A}; i_4(0^-) = \frac{E_1}{R_1 + R_2}$$

- Tổng từ thông của vòng kín:

$$\Psi_3(0^-) + \Psi_4(0^-) = 0 + L_4 \frac{E_1}{R_1 + R_2}$$

- Ngay sau chuyển mạch:

$$i_3(0^+) = i_4(0^+)$$

- Tổng từ thông vòng kín: $\Psi_3(0^+) + \Psi_4(0^+) = i_3(0^+) \cdot (L_3 + L_4)$

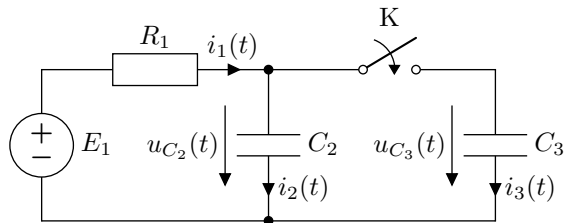
- Theo luật bảo toàn từ thông: $\Psi_3(0^+) + \Psi_4(0^+) = \Psi_3(0^-) + \Psi_4(0^-)$

$$\Rightarrow i_3(0^+) = i_4(0^+) = \frac{L_4}{L_3 + L_4} \cdot \frac{E_1}{R_1 + R_2}$$



Sơ kiện

Ví dụ 1.4: Tính các sơ kiện theo định luật bảo toàn điện tích



- Trước chuyển mạch:

$$u_{C_2}(0^-) = E_1$$

$$u_{C_3}(0^-) = 0 \text{ V}$$

- Tổng điện tích tại nút:

$$q_{C_2}(0^-) + q_{C_3}(0^-) = C_2 \cdot E_1 + 0$$

- Ngay sau chuyển mạch:

$$u_{C_2}(0^+) = u_{C_3}(0^+)$$

- Tổng điện tích tại nút: $q_{C_2}(0^+) + q_{C_3}(0^+) = u_{C_3}(0^+) \cdot (C_2 + C_3)$

- Luật bảo toàn điện tích: $q_{C_2}(0^+) + q_{C_3}(0^+) = q_{C_2}(0^-) + q_{C_3}(0^-)$

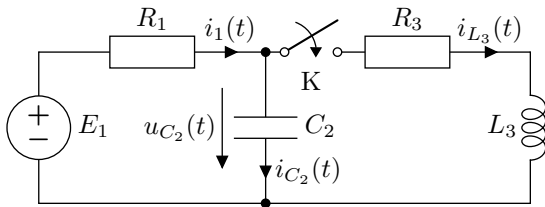
$$\Rightarrow u_{C_2}(0^+) = u_{C_3}(0^+) = \frac{C_2}{C_2 + C_3} \cdot E_1$$



Sơ kiện

- Có những bài toán yêu cầu tính sơ kiện của biến trạng thái và của đạo hàm các cấp của biến trạng thái

Ví dụ 1.5: Tính sơ kiện của biến và của đạo hàm bậc nhất



- Sơ kiện cần tính:
 $u_{C_2}(0^-); u_{C_2}(0^+);$
 $i_{L_3}(0^-); i_{L_3}(0^+);$
 $u'_{C_2}(0^+); i'_{L_3}(0^+)$

- Trước chuyển mạch:

$$u_{C_2}(0^-) = E_1; i_{L_3}(0^-) = 0$$

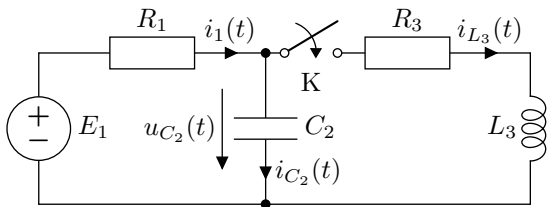
- Phép đóng mở chỉnh

$$\Rightarrow u_{C_2}(0^+) = u_{C_2}(0^-) = E_1; i_{L_3}(0^+) = i_{L_3}(0^-) = 0 \text{ A}$$



Sơ kiện

Ví dụ 1.5: Tính sơ kiện của biến và của đạo hàm bậc nhất



$$\begin{aligned} \bullet \quad u_{C_2}(0^+) &= E_1 \\ i_{L_3}(0^+) &= 0 \text{ A} \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Tính } i'_{L_3}(0^+):$$

Xét vòng $C_2 - R_3 - L_3$

$$i_{L_3}(0^+)R_3 + L_3 i'_{L_3}(0^+)$$

$$= u_{C_2}(0^+) = E_1$$

$$\Rightarrow i'_{L_3}(0^+) = \frac{E_1}{L_3}$$

$$\bullet \text{ Tính } u'_{C_2}(0^+):$$

Xét nút tại khoá K

$$i_{L_3}(0^+) + C_2 u'_{C_2}(0^+)$$

$$= i_1(0^+) = \frac{E_1 - u_{C_2}(0^+)}{R_1} = 0$$

$$\Rightarrow u'_{C_2}(0^+) = 0 \text{ V/s}$$



Nội dung

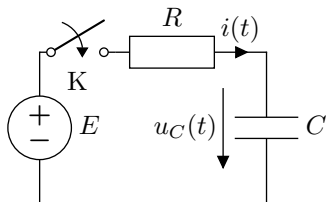
1 Mạch tuyến tính ở chế độ quá độ

- Hiện tượng quá độ, mô hình trạng thái, và sơ kiện
 - Hiện tượng quá độ
 - Mô hình trạng thái
 - Sơ kiện
- Phương pháp tích phân kinh điển
 - Tư tưởng của phương pháp
 - Nội dung của phương pháp
- Phương pháp toán tử Laplace
 - Tư tưởng của phương pháp
 - Phép biến đổi Laplace
 - Ảnh Laplace của mạch
 - Giải mạch tuyến tính quá độ bằng toán tử Laplace



Ví dụ dẫn nhập: mạch bậc nhất RC

Ví dụ 1.6: Xét mạch bậc nhất RC



- Phương trình K2:

$$R \cdot i(t) + u_C(t) - E = 0$$

- ⇒ Mô hình trạng thái của mạch

$$R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E$$

- Giải trực tiếp: $\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{E - u_C(t)}{RC} \Leftrightarrow \frac{d(u_C(t) - E)}{u_C(t) - E} = -\frac{1}{RC} dt$

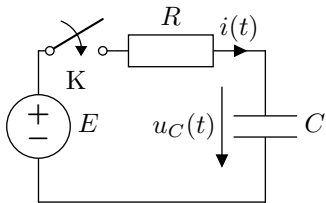
$$\Rightarrow \text{Tích phân hai vế: } \ln(u_C(t) - E) \Big|_{u_C(0^+)}^{u_C(t)} = -\frac{1}{RC} \cdot t \Big|_0^t$$

$$\Rightarrow \ln \frac{u_C(t) - E}{u_C(0^+) - E} = -\frac{1}{RC} t \Leftrightarrow u_C(t) = E + (u_C(0^+) - E) e^{-\frac{1}{RC} t}$$



Ví dụ dẫn nhập: mạch bậc nhất RC

Ví dụ 1.6: Xét mạch bậc nhất RC



- Nhận xét: giải trực tiếp mô hình trạng thái các mạch phức tạp sẽ khó khăn

⇒ Tìm cách **đại số hoá** việc giải mạch

- Phân tích: nghiệm = **xác lập** + **quá độ**

$$u_C(t) = E + (u_C(0^+) - E) e^{-\frac{1}{RC}t}$$

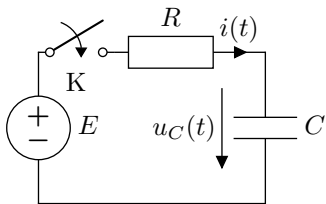
- Thành phần **quá độ** có dạng $A \cdot e^{pt}$ là **ng nghiệm của phương trình vi phân thuần nhất** $RC \frac{d}{dt} u_C(t) + u_C(t) = 0$
- Để tìm p , thay nghiệm vào phương trình vi phân:

$$RC \frac{d}{dt} (A \cdot e^{pt}) + A \cdot e^{pt} = 0 \Rightarrow RC \cdot p \cdot A \cdot e^{pt} + A \cdot e^{pt} = 0$$
- Để phương trình vi phân thoả mãn với mọi t cần có p là nghiệm của **đa thức đặc trưng**: $RC \cdot p + 1 = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{RC}$



Ví dụ dẫn nhập: mạch bậc nhất RC

Ví dụ 1.6: Xét mạch bậc nhất RC



- Xét phương trình vi phân thuần nhất

$$RC \frac{d}{dt} u_C(t) + u_C(t) = 0$$

$\Rightarrow$ Thu được đa thức đặc trưng bằng cách:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow p \iff \int_0^t \rightarrow \frac{1}{p}$$

Với p gọi là **toán tử Heaviside**

- Để tìm **hằng số tích phân** A ta quay lại nghiệm của pt trạng thái

$$u_C(t) = E + A \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

- A phải thoả mãn nghiệm tại mọi thời điểm $\rightarrow$ tại **sơ kiện**:

$$u_C(0^+) = E + A \cdot e^{-\frac{1}{RC}0} \Leftrightarrow A = u_C(0^+) - E$$



Giải mạch quá độ bằng tích phân kinh điển

Các bước thực hiện

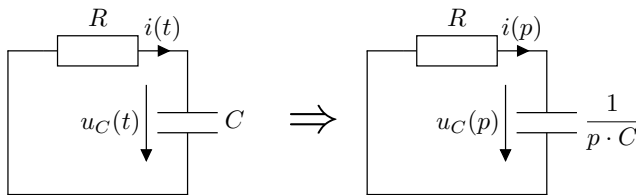
1. Tính **thành phần xác lập** sau quá độ
2. Tính các **sơ kiện** (0^+)
3. Lập **hệ phương trình vi phân trạng thái** của mạch
4. Triệt tiêu nguồn độc lập (cho = 0)
→ **hệ phương trình vi phân thuần nhất**
5. Đại số hoá phương trình vi phân thuần nhất
→ **đa thức đặc trưng** với toán tử Heaviside p
6. **Giải phương trình đại số** của đa thức đặc trưng
→ các nghiệm p_k của đa thức
7. **Xếp chồng thành phần xác lập** và **thành phần quá độ**
8. Tính nốt các **hằng số tích phân** A_k từ các **sơ kiện**



Giải mạch quá độ bằng tích phân kinh điển

Cách khác để lập đa thức đặc trưng: đại số hoá sơ đồ mạch

- Nhận thấy: hệ phương trình vi phân thuần nhất tương đương với mạch điện đã triệt tiêu nguồn độc lập
- ⇒ Có thể **đại số hoá trực tiếp sơ đồ mạch** với toán tử p
(Có thể gọi là **ảnh Heaviside của mạch**)



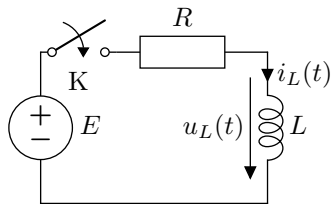
- Luật Kirchhoff 2 → tổng trở trên miền ảnh Heaviside triệt tiêu:

$$R + \frac{1}{p \cdot C} = 0 \rightarrow \text{đa thức đặc trưng. (Tại sao } Z_C(p) = \frac{1}{p \cdot C} \text{ ?)}$$



Tích phân kinh điển: mạch bậc nhất RL

Ví dụ 1.7: Xét mạch bậc nhất RL



- Thành phần xác lập: $i_{Lxl} = \frac{E}{R}$
- Sơ kiện: $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \text{ A}$
- Phương trình vi phân trạng thái:

$$\frac{d}{dt}i_L(t) + \frac{R}{L}i_L(t) = \frac{E}{L}$$
- ptvp thuần nhất: $\frac{d}{dt}i_L(t) + \frac{R}{L}i_L(t) = 0$
- $\frac{d}{dt} \rightarrow p$ được đa thức đặc trưng $p + \frac{R}{L} = 0$
- nghiệm của đa thức đặc trưng $p = -\frac{R}{L}$
- dạng nghiệm: $i_L(t) = \frac{E}{R} + A \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$
- Tại sơ kiện:

$$0 = \frac{E}{R} + A \cdot e^{-\frac{R}{L}0}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{E}{R}$$
- ⇒ **Nghiệm**

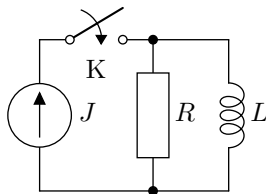
$$i_L(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$



Tích phân kinh điển: mạch bậc nhất RL

Bài tập 1.1

- Tại $t = 0$ khoá K đóng vào. Trước đó, cuộn dây không có điện.
- Tìm biểu thức dòng điện qua cuộn dây dùng phương pháp tích phân kinh điển bằng 2 cách:
 - Lập phương trình vi phân trạng thái
 - Đại số hoá sơ đồ mạch
- So sánh kết quả tìm được với Ví dụ 1.7 và rút ra nhận xét





Tính chất mạch bậc nhất RC và RL

Hằng số thời gian τ : xét kết quả của Ví dụ 1.6 và 1.7

- $u_C(t) = E + (u_C(0^+) - E) \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$
- $i_L(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$ (với $i_L(0^+) = 0$)

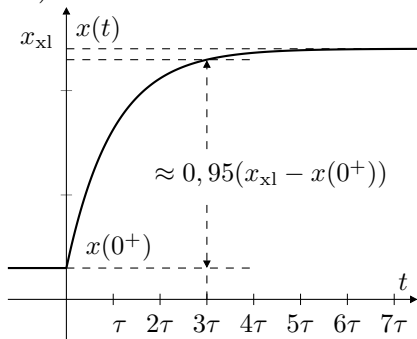
$\Rightarrow$ đều có dạng

$$x(t) = x_{xl} + (x(0^+) - x_{xl}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

trong đó $\tau = \frac{1}{RC}$ với mạch RC

và $\tau = \frac{L}{R}$ với mạch RL

- Ta thấy τ :
 - Là một hằng số
 - Có thứ nguyên thời gian
 - Có đủ các tham số của mạch



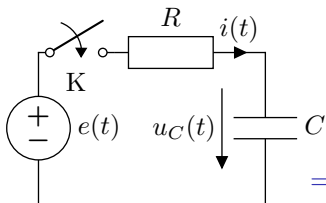
$\Rightarrow \tau$ gọi là **hằng số thời gian** của mạch



Tích phân kinh điển: nguồn điều hoà

Ví dụ 1.8: mạch RC đóng vào nguồn điều hoà

- Tại $t = 0$ khoá K đóng vào; $e(t) = 12\sqrt{2} \sin(10t + 30^\circ) \text{ V}$; $R = 4 \Omega$; $C = 0,1 \text{ F}$; ban đầu tụ C không có điện.



- Xác lập:

$$\dot{U}_{Cxl} = \frac{12/\underline{30^\circ}(-j\frac{1}{10 \cdot 0,1})}{4 - j\frac{1}{10 \cdot 0,1}} = 2,9104 \underline{-45,96^\circ} \text{ V}$$

$$\Rightarrow u_{Cxl}(t) = 4,1159 \sin(10t - 45,96^\circ) \text{ V}$$

- Giải tương tự Ví dụ 1.6 với $u_C(0^+) = 0$, có nghiệm:

$$u_C(t) = u_{Cxl}(t) + A \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

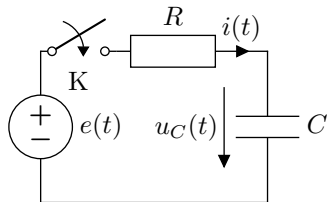
- Tại (0^+) :

$$A = u_C(0^+) - u_{Cxl}(0^+) = 0 - 4,1159 \cdot \sin(-45,96^\circ) = 2,9588 \text{ V}$$



Tích phân kinh điển: nguồn điều hoà

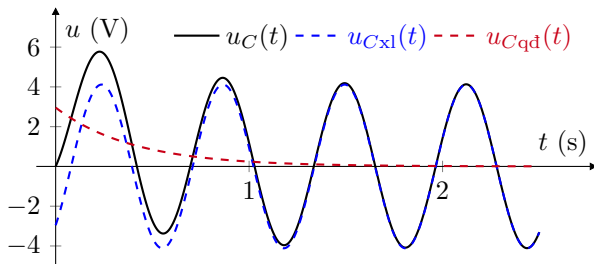
Ví dụ 1.8: mạch RC đóng vào nguồn điều hoà



- $u_{Cx1}(t) = 4,1159 \sin(10t - 45,96^\circ) \text{ V}$

- $A = 2,9588 \text{ V}; \frac{1}{RC} = 2,5 \text{ s}^{-1}$

$\Rightarrow$ Tổng hợp nghiệm: $u_C(t) = 4,1159 \sin(10t - 45,96^\circ) + 2,9588 \cdot e^{-2,5t} \text{ V}$



Bài tập 1.2

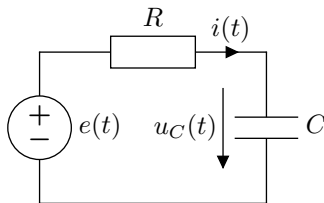
- Giải mạch với nguồn $e(t)$ có góc pha $45^\circ, 90^\circ$
- Mô phỏng mạch bằng LTspice



Bài tập

Bài tập 1.3: Chuyển mạch liên tiếp

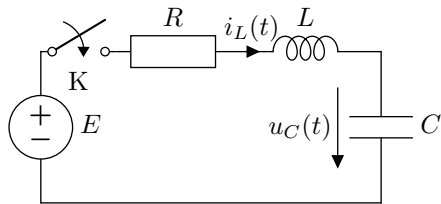
- $e(t) = 12 \cdot (1(t) - 1(t - 1))$ V;
- $R = 4 \Omega$;
- $C = 0,1$ F;



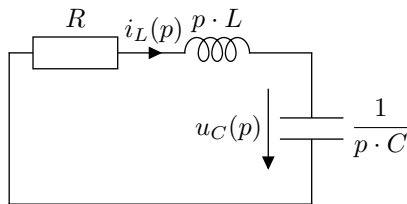
Tích phân kinh điển: mạch bậc hai RLC

Ví dụ 1.9: xét mạch bậc hai RLC

- Tại $t = 0$ khoá K đóng
- Ban đầu không có điện



- Đại số hoá sơ đồ mạch
- $$\Rightarrow R + p \cdot L + \frac{1}{p \cdot C} = 0$$

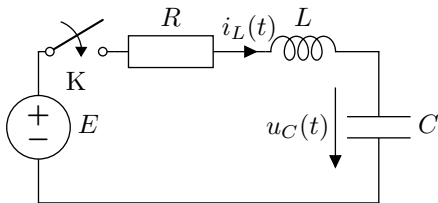


$$\Rightarrow \text{Đa thức đặc trưng: } p^2 + \frac{R}{L} \cdot p + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\Rightarrow p_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}; p_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Tích phân kinh điển: mạch bậc hai RLC

Ví dụ 1.9: xét mạch bậc hai RLC



- Tùy vào giá trị thông số mạch mà đa thức đặc trưng có **2 nghiệm thực đơn**, **nghiệm phức liên hợp**, hoặc **nghiệm kép**

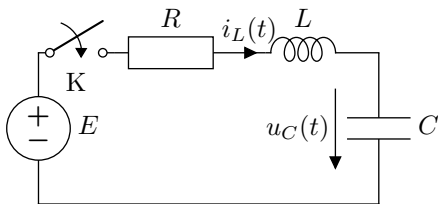
$$1. R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow 2 \text{ nghiệm thực đơn} \rightarrow \text{Không dao động}$$

$$2. R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow 2 \text{ nghiệm phức liên hợp} \rightarrow \text{Dao động}$$

$$3. R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow \text{nghiệm kép} \rightarrow \text{Tối hạn}$$

Tích phân kinh điển: mạch bậc hai RLC

Ví dụ 1.9: Trường hợp 2 nghiệm thực đơn – Không dao động



- Thông số mạch: $E = 12 \text{ V}$;
 $R = 4 \Omega$; $C = 0,1 \text{ F}$; $L = 0,1 \text{ H}$

$$\Rightarrow p_1 = -2,6795 \text{ s}^{-1}$$

$$p_2 = -37,3205 \text{ s}^{-1}$$

$$\Rightarrow u_C(t) = U_{Cx1} + A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}$$

- Với $i_L(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \Rightarrow i_L(t) = C \cdot A_1 \cdot p_1 \cdot e^{p_1 t} + C \cdot A_2 \cdot p_2 \cdot e^{p_2 t}$

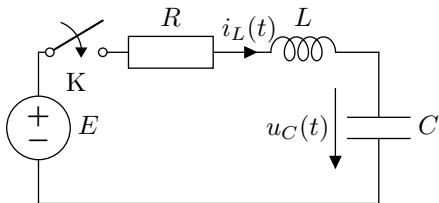
- Từ các sơ kiện $u_C(0^+) = 0 \text{ V}$ và $i_L(0^+) = 0 \text{ A}$

→ Hệ phương trình đại số để tìm các hằng số tích phân

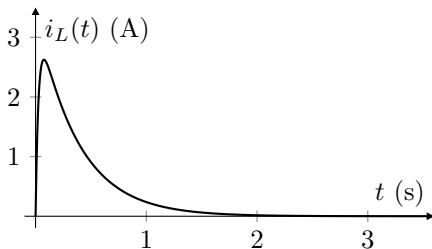
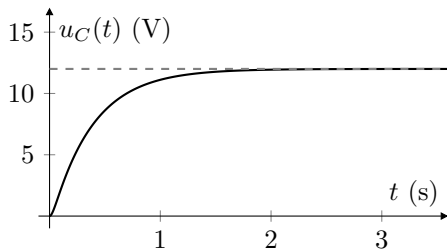
$$\begin{cases} A_1 + A_2 = -E \\ p_1 \cdot A_1 + p_2 \cdot A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -12,9282 \text{ V} \\ A_2 = 0,9282 \text{ V} \end{cases}$$

Tích phân kinh điển: mạch bậc hai RLC

Ví dụ 1.9: Trường hợp 2 nghiệm thực đơn – Không dao động



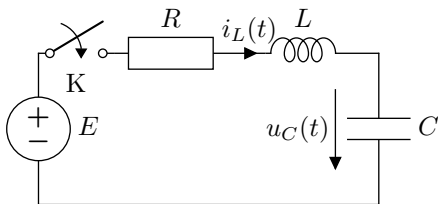
- $u_C(t) = 12 - 12,9282e^{-2,6795t} + 0,9282e^{-37,3205t} \text{ V}$
- $i_L(t) = 3,4641e^{-2,6795t} - 3,4641e^{-37,3205t} \text{ A}$





Tích phân kinh điển: mạch bậc hai RLC

Ví dụ 1.9: Trường hợp 2 nghiệm phức liên hợp – Dao động



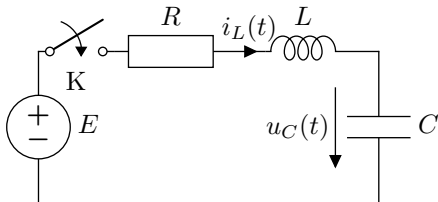
- Thông số mạch: $E = 12 \text{ V}$;
 $R = 0,5 \Omega$; $C = 0,1 \text{ F}$; $L = 0,1 \text{ H}$
- $\Rightarrow p_{12} = -2,5 \pm j9,6825 \text{ s}^{-1}$
- Có dạng: $p_{12} = -\alpha \pm j\omega_d$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow u_C(t) &= U_{Cx1} + A_1 \cdot e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + A_2 \cdot e^{(-\alpha - j\omega_d)t} \\
 &= U_{Cx1} + e^{-\alpha t} (A_1 \cdot e^{j\omega_d t} + A_2 \cdot e^{-j\omega_d t}) \\
 &= U_{Cx1} + e^{-\alpha t} [A_1 (\cos \omega_d t + j \sin \omega_d t) + A_2 (\cos \omega_d t - j \sin \omega_d t)] \\
 &= U_{Cx1} + e^{-\alpha t} [(A_1 + A_2) \cos \omega_d t + j(A_1 - A_2) \sin \omega_d t] \\
 \Rightarrow u_C(t) &= U_{Cx1} + e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \\
 &\text{với } B_1 = A_1 + A_2 \text{ và } B_2 = j(A_1 - A_2) \text{ là các số thực.}
 \end{aligned}$$



Tích phân kinh điển: mạch bậc hai RLC

Ví dụ 1.9: Trường hợp 2 nghiệm phức liên hợp – Dao động



- Thông số mạch: $E = 12 \text{ V}$;
 $R = 0,5 \Omega$; $C = 0,1 \text{ F}$; $L = 0,1 \text{ H}$
- $\Rightarrow p_{12} = -2,5 \pm j9,6825 \text{ s}^{-1}$
- Có dạng: $p_{12} = -\alpha \pm j\omega_d$

- $u_C(t) = U_{Cx1} + e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$

- Với $i_L(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$

$$\Rightarrow i_L(t) = C e^{-\alpha t} [(-\alpha B_2 - B_1 \omega_d) \sin \omega_d t + (-\alpha B_1 + B_2 \omega_d) \cos \omega_d t]$$

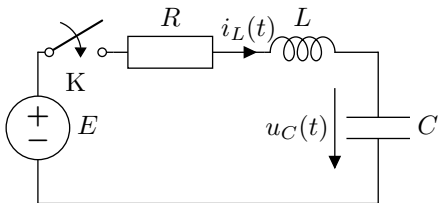
- Từ các sơ kiện $u_C(0^+) = 0 \text{ V}$ và $i_L(0^+) = 0 \text{ A}$

$$\begin{cases} B_1 = -E \\ -\alpha B_1 + B_2 \omega_d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = -12 \text{ V} \\ B_2 = -3,0984 \text{ V} \end{cases}$$

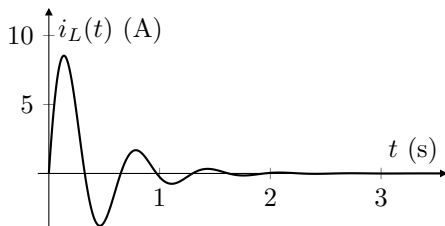
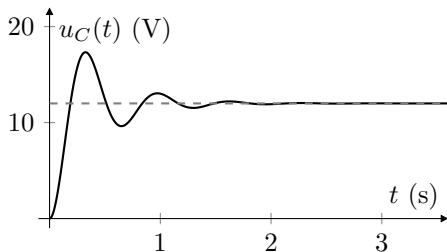


Tích phân kinh điển: mạch bậc hai RLC

Ví dụ 1.9: Trường hợp 2 nghiệm phức liên hợp – Dao động

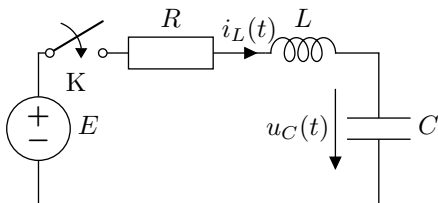


- $u_C(t) = 12 + e^{-2,5t}(-12 \cos 9,6825t - 3,0984 \sin 9,6825t) \text{ V}$
- $i_L(t) = 12,3936e^{-2,5t} \sin 9,6825t \text{ A}$



Tích phân kinh điển: mạch bậc hai RLC

Ví dụ 1.9: Trường hợp nghiệm kép – Tối hạn



- Thông số mạch: $E = 12 \text{ V}$;
 $R = 2 \Omega$; $C = 0,1 \text{ F}$; $L = 0,1 \text{ H}$

$$\Rightarrow p = -10 \text{ s}^{-1}$$

$$\Rightarrow u_C(t) = U_{Cx1} + (A_2 + A_1 t)e^{pt}$$

(Chứng minh: tự đọc tài liệu)

$$\Rightarrow i_L(t) = C \cdot e^{pt} [A_1 + p \cdot (A_2 + A_1 \cdot t)]$$

- Từ các sơ kiện $u_C(0^+) = 0 \text{ V}$ và $i_L(0^+) = 0 \text{ A}$

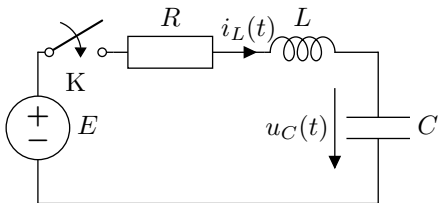
$$\Rightarrow A_1 = -120; A_2 = -12$$

$$\Rightarrow u_C(t) = 12 + (-12 - 120 \cdot t)e^{-10t} \text{ V}$$

$$i_L(t) = 120 \cdot t \cdot e^{-10t} \text{ A}$$

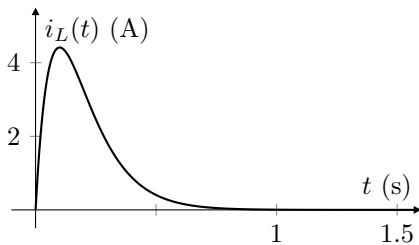
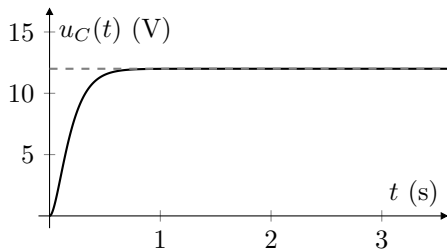
Tích phân kinh điển: mạch bậc hai RLC

Ví dụ 1.9: Trường hợp nghiệm kép – Tối hạn



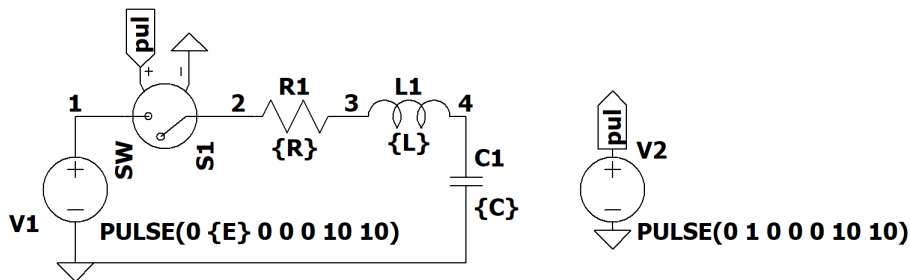
$$\bullet u_C(t) = 12 + (-12 - 120 \cdot t)e^{-10t} \text{ V}$$

$$\bullet i_L(t) = 120 \cdot t \cdot e^{-10t} \text{ A}$$



Tích phân kinh điển: mạch bậc hai RLC

Ví dụ 1.9: Mô phỏng LTspice

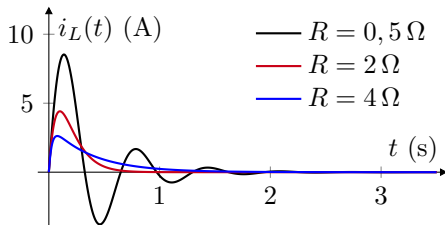
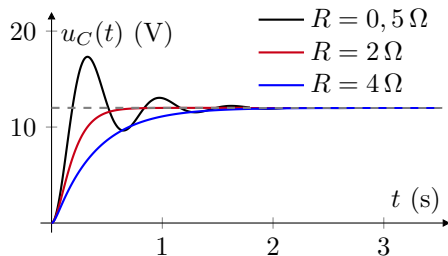


```
.step param val list 0.5 2 4
.param R={val} L=0.1 C=0.1 E=12
.model SW SW(Ron=1n Roff=1Meg Vt=0.5)
.tran 3.5
```




Tích phân kinh điển: mạch bậc hai RLC

Ví dụ 1.9: Kết quả mô phỏng LTspice



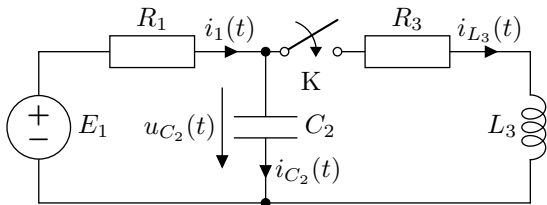
Bài tập 1.4:

- Giải mạch và mô phỏng với $R = 0 \Omega$
- Giải thích hiện tượng và kết quả



Tích phân kinh điển: mạch bậc hai RLC

Bài tập 1.5: Mạch bậc hai RLC nhiều nhánh



- Thông số mạch:
 $E_1 = 12 \text{ V}; R_1 = 2 \Omega;$
 $C_2 = 0,5 \text{ F}; R_3 = 4 \Omega;$
 $L_3 = 1 \text{ H}$
- $t = 0$ khoá K đóng vào

• Gợi ý

- Vì L_3 và C_2 ở các nhánh khác nhau nên $i_{C_2}(t) \neq i_{L_3}(t)$
- Không dẫn ra phương trình $i_{L_3}(t)$ bằng cách đạo hàm $u_{C_2}(t)$ được
- $i_{L_3}(t)$ cũng có dạng tương tự nhưng có các hệ số cần tính riêng
- Cần có thêm các sơ kiện của đạo hàm bậc nhất $u'_{C_2}(0^+)$ và $i'_{L_3}(0^+)$ để lập đủ phương trình cho các ẩn cần tìm



Phương pháp tích phân kinh điển

Nhận xét

- 😊 Tích phân kinh điển là một phương pháp **có tính hệ thống**, cho ta **quy trình rõ ràng** để giải các bài toán mạch tuyến tính quá độ
- 😊 Đặc biệt, phương pháp của Heaviside là một bước tiến quan trọng về cách tiếp cận **đại số hoá phương trình vi phân trạng thái** và **đại số hoá sơ đồ mạch** bằng một **toán tử phức**
- 😞 Phương pháp dài và phức tạp; chỉ tiện để tính các mạch cơ bản
- 😞 Phương pháp này **sử dụng các sơ kiện (0^+)**, để tìm sơ kiện (0^+) trước đó cần tìm các sơ kiện (0^-); mạch có bậc N thì cần tìm N sơ kiện (0^+) để lập N phương trình
- 😞 Chỉ phù hợp để giải các mạch có nguồn một chiều, điều hoà, hoặc tuần hoàn mà ta **dễ tìm được nghiệm xác lập**; không phù hợp với các nguồn loại khác, chẳng hạn $E \cdot e^{-at}$



Nội dung

1 Mạch tuyến tính ở chế độ quá độ

- Hiện tượng quá độ, mô hình trạng thái, và sơ kiện
 - Hiện tượng quá độ
 - Mô hình trạng thái
 - Sơ kiện
- Phương pháp tích phân kinh điển
 - Tư tưởng của phương pháp
 - Nội dung của phương pháp
- Phương pháp toán tử Laplace
 - Tư tưởng của phương pháp
 - Phép biến đổi Laplace
 - Ảnh Laplace của mạch
 - Giải mạch tuyến tính quá độ bằng toán tử Laplace



Tư tưởng của phương pháp toán tử Laplace

Ý tưởng

Những ưu và nhược điểm của phương pháp tích phân kinh điển với toán tử Heaviside cho ta động lực tìm kiếm một phương pháp:

- Phát huy ưu điểm về ý tưởng đại số hoá phương trình vi phân và đại số hoá sơ đồ mạch bằng phương pháp toán tử phức
- Khắc phục nhược điểm cần tính nhiều sơ kiện (0^-) và (0^+)
- Không cần tính riêng nghiệm xác lập, thuận tiện cho nhiều dạng hàm của nguồn kích thích



Tư tưởng của phương pháp toán tử Laplace

Những đặc điểm mà phương pháp mới cần có

- Cần dựa trên một phép biến đổi là **song ánh tuyến tính**
 - Là song ánh để đảm bảo sự **tương ứng 1 – 1** giữa tín hiệu trên miền thời gian t và ảnh trên miền phức s

$$f(t) \longleftrightarrow F(s)$$

- Là **ánh xạ tuyến tính** để thoả mãn nguyên lý xếp chồng

$$\sum a_k \cdot f_k(t) \longleftrightarrow \sum a_k \cdot F_k(s)$$

- Có thể chuyển phép tính **đạo hàm trên miền thời gian** thành phép **nhân với toán tử s** trên miền phức để **đại số hoá** bài toán giải mạch

$$\frac{d}{dt} f(t) \longleftrightarrow sF(s)$$

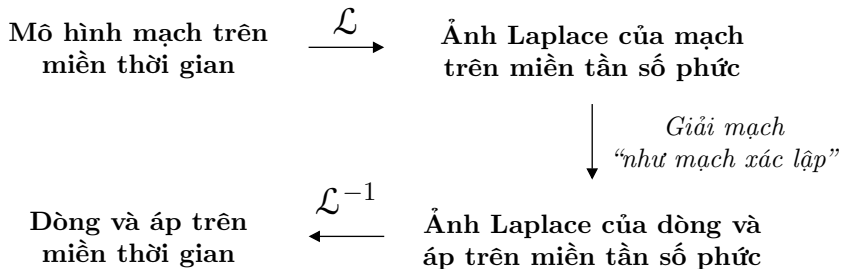
- Phép biến đổi có thể **được xác định từ sơ kiện (0^-)** để tránh phải tính thêm các sơ kiện (0^+)

⇒ **Phép biến đổi Laplace**



Tư tưởng của phương pháp toán tử Laplace

Ý tưởng giải mạch bằng biến đổi Laplace



$\Rightarrow$ Ta cần tìm hiểu các nội dung:

- Phép biến đổi Laplace
- Phép biến đổi Laplace ngược
- Ảnh phức của các phần tử mạch



Phép biến đổi Laplace

Biến đổi Laplace hai phía: ánh xạ từ hàm thực sang ảnh phức

- Về toán học, biến đổi Laplace được định nghĩa từ $-\infty$ đến $+\infty$

$$F(s) = \mathcal{L}(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx$$

Biến đổi Laplace một phía: từ miền thời gian sang miền tần số phức

- Với mạch điện và các hệ vật lý nói chung, ta chỉ xét hệ từ $t = 0$ s
- Để thuận tiện ứng dụng cho giải mạch quá độ, ta lấy cận từ (0^-)

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

với $s = \sigma + j\omega$ là một số phức có đơn vị $s^{-1} \rightarrow$ gọi là tần số phức



Ảnh Laplace của tín hiệu

Có thể tính trực tiếp từ định nghĩa

- Ảnh phức của **hằng số** $f(t) = E_0$

$$\begin{aligned}\Rightarrow F(s) = \mathcal{L}(f(t)) &= \int_{0-}^{\infty} E_0 \cdot e^{-st} dt \\ &= -\frac{E_0}{s} e^{-st} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{E_0}{s}\end{aligned}$$

- Ảnh phức của **tín hiệu tắt dần** $f(t) = E_0 \cdot e^{-at}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow F(s) = \mathcal{L}(f(t)) &= \int_{0-}^{\infty} E_0 \cdot e^{-at} \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_{0-}^{\infty} E_0 \cdot e^{-(s+a)t} dt \\ &= -\frac{E_0}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{E_0}{s+a}\end{aligned}$$



Ảnh Laplace của tín hiệu

Hoặc tra bảng

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$

$f(t)$	$F(s)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \cdot \sin \varphi + \omega \cdot \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \cdot \cos \varphi - \omega \cdot \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$



Một số tính chất cơ bản của ảnh Laplace

Tính chất tuyến tính

- Phép biến đổi Laplace là một ánh xạ tuyến tính
- Cho 2 hàm $f_1(t)$ và $f_2(t)$ có

$$\mathcal{L}(f_1(t)) = F_1(s)$$

$$\mathcal{L}(f_2(t)) = F_2(s)$$

- Theo nguyên lý xếp chồng ta có

$$\mathcal{L}(a_1 \cdot f_1(t) + a_2 \cdot f_2(t)) = a_1 \cdot F_1(s) + a_2 \cdot F_2(s)$$

- Tính chất tuyến tính cho phép ta **phân tích ảnh Laplace** (và ảnh ngược sẽ nói sau đây) của **một hàm phức tạp** thành **tổ hợp tuyến tính** (tổng của tích với hằng số) của **các hàm cơ bản**
- Ví dụ:

$$\mathcal{L}(2 + 3 \sin t + 4 \sin(5t + 60^\circ)) = \frac{2}{s} + 3 \frac{1}{s^2 + 1} + 4 \frac{s \cdot \sin 60^\circ + 5 \cos 60^\circ}{s^2 + 25}$$



Một số tính chất cơ bản của ảnh Laplace

Ảnh của đạo hàm

- Cho hàm số $f(t)$ có ảnh Laplace $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$
- Tính $\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}f(t)\right)$ từ định nghĩa bằng tích phân từng phần:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}f(t)\right) &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{d}{dt}f(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}d(f(t)) \\
 &= f(t) \cdot e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} f(t)d(e^{-st}) \\
 &= -f(0^-) + s \cdot \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\
 &= sF(s) - f(0^-)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Chuyển phép tính **đạo hàm** trên miền thời gian thành **phép nhân** với toán tử s trên miền phức và **mang thông tin** của sơ kiện (0^-)



Một số tính chất cơ bản của ảnh Laplace

Định lý dịch gốc thời gian

- Cho $f(t)$; tính $\mathcal{L}(f(t - T))$ để xét chuyển mạch ở thời điểm $T \neq 0$
- Xét thấy trong khoảng $[0^-, \infty]$: $f(t - T) = f(t - T) \cdot \mathbf{1}(t - T)$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(f(t - T)) &= \int_{0^-}^{\infty} \mathbf{1}(t - T) \cdot f(t - T) e^{-st} dt \\
 &= \int_{0^-}^{\infty} \mathbf{1}(t - T) \cdot f(t - T) \frac{e^{-s(t-T)}}{e^{sT}} d(t - T) \\
 &= \int_{-T}^{\infty} \mathbf{1}(t) \cdot f(t) \frac{e^{-st}}{e^{sT}} dt \\
 &= \int_{-T}^{0^-} \mathbf{1}(t) \cdot f(t) \frac{e^{-st}}{e^{sT}} dt + \int_{0^-}^{\infty} \mathbf{1}(t) \cdot f(t) \frac{e^{-st}}{e^{sT}} dt \\
 &= 0 + e^{-sT} \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = e^{-sT} F(s)
 \end{aligned}$$



Ảnh Laplace ngược

- Mạch trên miền Laplace $\xrightarrow{\text{Giải}}$ ảnh phức $(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$ tín hiệu gốc (t)

Tuy ta có định nghĩa tổng quát của ảnh ngược ...

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

... nhưng không dùng cách tính này vì không thuận tiện

Tìm ảnh ngược bằng phương pháp Heaviside (phương pháp thẳng dư)

- Trong bài toán mạch, ta thường gặp ảnh Laplace dạng phân thức đại số $F(s) = \frac{F_{ts}(s)}{F_{ms}(s)}$; trong đó đa thức mẫu số $F_{ms}(s)$ có các nghiệm đơn $s_{đi}$ hoặc nghiệm bội (bậc n) s_{bj}

$\Rightarrow$ phân tích thành các dạng cơ bản $\sum \frac{A_i}{s - s_{đi}}$ và $\sum \frac{A_j}{(s - s_{bj})^n}$



Ảnh Laplace ngược

Tìm ảnh ngược bằng phương pháp Heaviside (phương pháp thặng dư)

1. Trường hợp nghiệm đơn (thực hoặc phức liên hợp)

- Phân tích được $F(s) = \sum \frac{A_i}{s - s_{đi}}$

$\Rightarrow$ Tính các hệ số $A_i = (s - s_{đi})F(s)|_{s=s_{đi}}$

- **VD nghiệm thực đơn:** Tìm tín hiệu gốc của $F(s) = \frac{5s + 13}{s^2 + 5s + 6}$

Phân tích được dưới dạng $F(s) = \frac{A_1}{s + 3} + \frac{A_2}{s + 2}$

$\Rightarrow A_1 = (s + 3) \frac{5s+13}{s^2+5s+6} \Big|_{s=-3} = 2; A_2 = (s + 2) \frac{5s+13}{s^2+5s+6} \Big|_{s=-2} = 3$

$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{2}{s+3} + \frac{3}{s+2} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{2}{s+3} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{3}{s+2} \right)$
 $= 2e^{-3t} + 3e^{-2t}$



Ảnh Laplace ngược

Tìm ảnh ngược bằng phương pháp Heaviside (phương pháp thặng dư)

1. Trường hợp nghiệm đơn (thực hoặc phức liên hợp)

- Phân tích được $F(s) = \sum \frac{A_i}{s - s_{đi}}$

⇒ Tính các hệ số $A_i = (s - s_{đi})F(s)|_{s=s_{đi}}$

- Ví dụ nghiệm phức:** Tìm tín hiệu gốc của $F(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$

Phân tích được dưới dạng $F(s) = \frac{A_1}{s + 1 - j2} + \frac{A_2}{s + 1 + j2}$

⇒ $A_1 = (s + 1 - j2) \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \Big|_{s=-1+j2} = 0,25e^{-j\frac{\pi}{2}}; A_2 = A_1^* = 0,25e^{j\frac{\pi}{2}}$

⇒ $f(t) = 0,25e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{(-1+j2)t} + 0,25e^{j\frac{\pi}{2}}e^{(-1-j2)t}$
 $= 0,25e^{-t} (e^{j(2t-\pi/2)} + e^{j(-2t+\pi/2)}) = 0,5e^{-t} \sin 2t$



Ảnh Laplace ngược

Tìm ảnh ngược bằng phương pháp Heaviside (phương pháp thẳng dư)

2. Trường hợp nghiệm bội

- Phân tích được $F(s) = \frac{A_0}{(s - s_{b_0})^n} + \frac{A_1}{(s - s_{b_0})^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{s - s_{b_0}}$

$$\Rightarrow A_0 = (s - s_{b_0})^n F(s) \Big|_{s=s_{b_0}}$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{d}{dt} ((s - s_{b_0})^n F(s)) \Big|_{s=s_{b_0}}$$

...

$$\Rightarrow \text{Tổng quát: } A_i = \frac{1}{i!} \cdot \frac{d^{(i)}}{dt^i} ((s - s_{b_0})^n F(s)) \Big|_{s=s_{b_0}}$$



Ảnh Laplace ngược

Tìm ảnh ngược bằng phương pháp Heaviside (phương pháp thẳng dư)

2. Trường hợp nghiệm bội

- Phân tích được $F(s) = \frac{A_0}{(s-s_b)^n} + \frac{A_1}{(s-s_b)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{s-s_b}$

$$\Rightarrow A_i = \frac{1}{i!} \cdot \frac{d^{(i)}}{dt^{(i)}} ((s - s_{b0})^n F(s)) \Big|_{s=s_b}$$

- Ví dụ nghiệm bội:** Tìm tín hiệu gốc của $F(s) = \frac{1}{s(s+2)^2}$

$$\text{Phân tích thành } F(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_{20}}{(s+2)^2} + \frac{A_{21}}{s+2}$$

$$A_1 = s \frac{1}{s(s+2)^2} \Big|_{s=0} = 0,25; \quad A_{20} = (s+2)^2 \frac{1}{s(s+2)^2} \Big|_{s=-2} = -0,5;$$

$$A_{21} = \frac{d}{dt} (s+2)^2 \frac{1}{s(s+2)^2} \Big|_{s=-2} = -0,25$$

$$\Rightarrow f(t) = 0,25 - 0,5t \cdot e^{-2t} - 0,25e^{-2t}$$

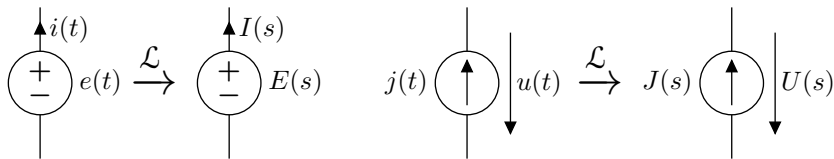


Ảnh Laplace của mạch

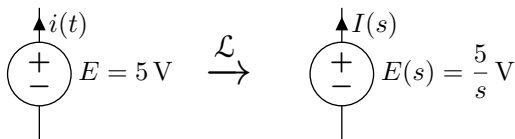
- Phép biến đổi Laplace cho phép ta xây dựng mô hình mạch trên miền ảnh Laplace $\rightarrow$ **Đại số hoá sơ đồ mạch bằng toán tử Laplace**

Các phần tử nguồn

- Không thay đổi về hình thức; nguồn phụ thuộc cũng tương tự



- Ví dụ

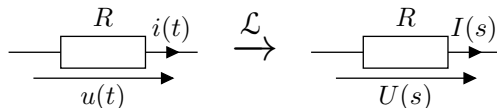




Ảnh Laplace của mạch

Điện trở

- Không thay đổi về hình thức phần tử và quan hệ đặc trưng



- $u(t) = R \cdot i(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \mathcal{L}(R \cdot i(t)) = R \cdot \mathcal{L}(i(t)) = R \cdot I(s)$
- Điều này là dễ hiểu vì phần tử điện trở không tích lũy năng lượng, không có quán tính với dòng và áp.



Ảnh Laplace của mạch

Tụ điện

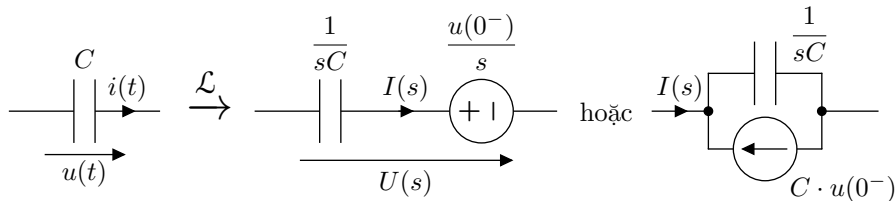
- Quan hệ đặc trưng $i(t) = C \frac{d}{dt} u(t)$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} I(s) = \mathcal{L} \left(C \frac{d}{dt} u(t) \right) = C \cdot \mathcal{L} \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) = C (s \cdot U(s) - u(0^-))$$

$$= sC \cdot U(s) - C \cdot u(0^-) \quad (\text{mô hình sơ kiện dạng nguồn dòng})$$

$$\Leftrightarrow U(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u(0^-)}{s} \quad (\text{mô hình sơ kiện dạng nguồn áp})$$

- $Z_C(s) = \frac{1}{sC}$ là trở kháng phức của tụ điện trên miền ảnh Laplace





Ảnh Laplace của mạch

Cuộn dây

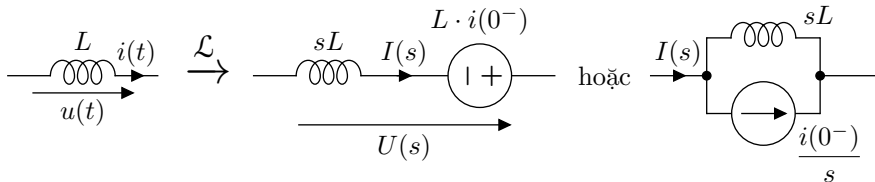
- Quan hệ đặc trưng $u(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \mathcal{L} \left(L \frac{d}{dt} i(t) \right) = L \cdot \mathcal{L} \left(\frac{d}{dt} i(t) \right) = L (s \cdot I(s) - i(0^-))$$

$$= sL \cdot I(s) - L \cdot i(0^-) \quad (\text{mô hình sơ kiện dạng nguồn áp})$$

$$\Leftrightarrow I(s) = \frac{1}{sL} U(s) + \frac{i(0^-)}{s} \quad (\text{mô hình sơ kiện dạng nguồn dòng})$$

- $Z_L(s) = sL$ là trở kháng phức của cuộn dây trên miền ảnh Laplace





Ảnh Laplace của mạch

Hỗ cảm

$$u_1(t) = L_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \cdot \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$u_2(t) = L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \cdot \frac{di_1(t)}{dt}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} U_1(s) = (sL_1 \cdot I_1(s) - L_1 \cdot i_1(0^-)) \pm (sM \cdot I_2(s) - M \cdot i_2(0^-)) \\ U_2(s) = (sL_2 \cdot I_2(s) - L_2 \cdot i_2(0^-)) \pm (sM \cdot I_1(s) - M \cdot i_1(0^-)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_1(s) = (sL_1 \cdot I_1(s) \pm sM \cdot I_2(s)) - (L_1 \cdot i_1(0^-) \pm M \cdot i_2(0^-)) \\ U_2(s) = (sL_2 \cdot I_2(s) \pm sM \cdot I_1(s)) - (L_2 \cdot i_2(0^-) \pm M \cdot i_1(0^-)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_1(s) = sL_1 \cdot I_1(s) \pm sM \cdot I_2(s) - E_{12}(0^-) \\ U_2(s) = sL_2 \cdot I_2(s) \pm sM \cdot I_1(s) - E_{21}(0^-) \end{cases}$$

- Mô hình sơ kiện dạng nguồn áp tương tự cho mỗi cuộn dây



Giải mạch tuyến tính quá độ bằng toán tử Laplace

Các bước thực hiện với thời điểm chuyển mạch $t = 0$

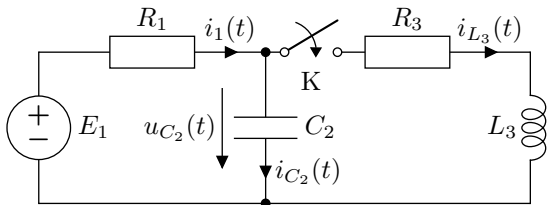
1. Tìm các **sơ kiện** (0^-) ngay trước chuyển mạch
2. Vẽ **sơ đồ mạch** trên miền ảnh Laplace **sau chuyển mạch**
3. Giải mạch trên miền ảnh Laplace “tương tự” như ở chế độ xác lập
→ tìm ra các ảnh phức của dòng và áp $I(s)$ và $U(s)$
4. Biến đổi Laplace ngược (bằng phương pháp thặng dư Heaviside)
tìm nghiệm gốc $u(t)$ và $i(t)$ (và công suất nếu yêu cầu)

Chú ý

- Nếu thời điểm chuyển mạch $t \neq 0$ có thể dùng phép dịch gốc thời gian về 0 để giải
- Do mạch có thể phát sinh nguồn sơ kiện nên tổng trở tương đương và xếp chồng (cần triệt tiêu nguồn) không phù hợp trên miền (t)

Giải mạch tuyến tính quá độ bằng toán tử Laplace

Ví dụ 1.10:



- Thông số mạch:

$$E_1 = 12 \text{ V}; R_1 = 2 \Omega;$$

$$C_2 = 0,5 \text{ F}; R_3 = 4 \Omega;$$

$$L_3 = 1 \text{ H}$$

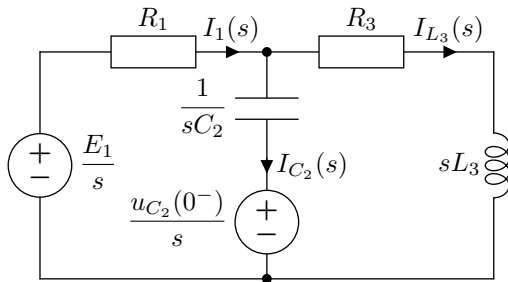
- $t = 0$ khoá K đóng vào

1. Sơ kiện:

$$u_{C_2}(0^-) = 12 \text{ V};$$

$$i_{L_3}(0^-) = 0 \text{ A}$$

2. Ảnh Laplace của mạch sau chuyển mạch:



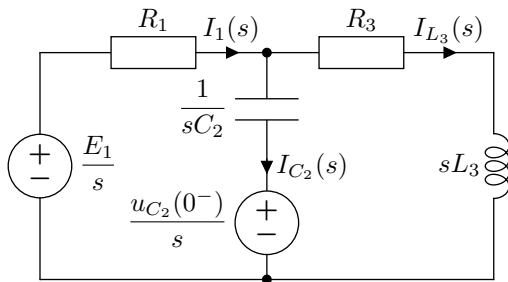


Giải mạch tuyến tính quá độ bằng toán tử Laplace

Ví dụ 1.10:

3. Giải mạch trên miền ảnh Laplace

- Ví dụ dùng phương pháp điện thế nút



$$\begin{aligned}
 U_{C_2}(s) &= \frac{\frac{E_1}{sR_1} + C_2 E_1}{\frac{1}{R_1} + sC_2 + \frac{1}{R_3 + sL_3}} \\
 &= \frac{(E_1 + sR_1 C_1 E_1)(R_3 + sL_3)}{s(s^2 R_1 L_3 C_2 + s(R_1 R_3 C_2 + L_3) + R_1 + R_3)} = \frac{(12s + 12)(s + 4)}{s(s^2 + 5s + 6)}
 \end{aligned}$$

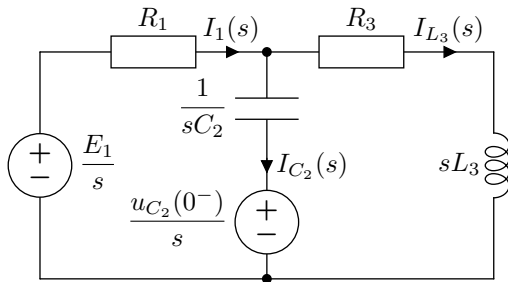


Giải mạch tuyến tính quá độ bằng toán tử Laplace

Ví dụ 1.10:

4. Tìm tín hiệu gốc $u_{C_2}(t)$ bằng phương pháp thặng dư Heaviside

- Đa thức mẫu số có 3 nghiệm đơn: $s_0 = 0$; $s_1 = -2$; $s_2 = -3$



- $A_0 = sU_{C_2}(s)|_{s=0} = 8$

$$A_1 = (s + 2)U_{C_2}(s)|_{s=-2} = 12$$

$$A_2 = (s + 3)U_{C_2}(s)|_{s=-3} = -8$$

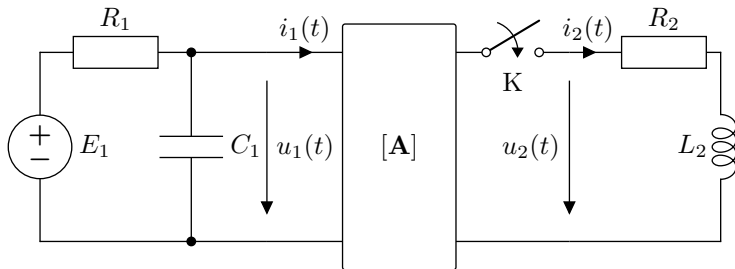
$$\Rightarrow u_{C_2}(t) = A_0 + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} = 8 + 12e^{-2t} - 8e^{-3t} \text{ V}$$



Giải mạch tuyến tính quá độ bằng toán tử Laplace

Ví dụ 1.11: Mạch quá độ với mạng hai cửa

- $E_1 = 18 \text{ V}$; $R_1 = 2 \Omega$; $C_2 = 0,25 \text{ F}$; $R_2 = 4 \Omega$; $L_2 = 1 \text{ H}$
- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 0,5 & 3 \end{bmatrix}$; tại $t = 0$ khoá K đóng vào



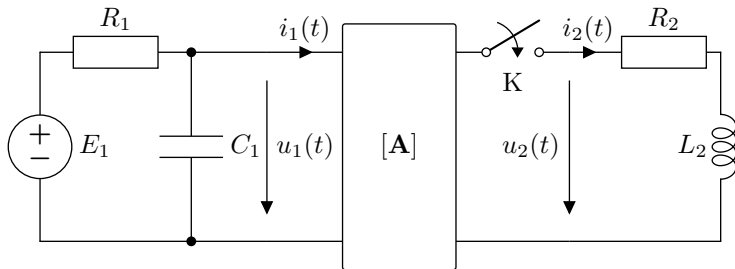
1. Tính sơ kiện $u_1(0^-)$ và $i_2(0^-)$

- Trước chuyển mạch $i_2(0^-) = 0 \text{ A}$



Giải mạch tuyến tính quá độ bằng toán tử Laplace

Ví dụ 1.11: Mạch quá độ với mạng hai cửa



- Tính $u_1(0^-)$ từ quan hệ mạng hai cửa khi hở mạch cửa 2:

$$\begin{cases} u_1(t) = a_{11}u_2(t) \\ i_1(t) = a_{21}u_2(t) \end{cases} \Rightarrow R_{\text{vào}} = \frac{u_1(t)}{i_1(t)} = \frac{a_{11}}{a_{21}} = 4 \Omega$$

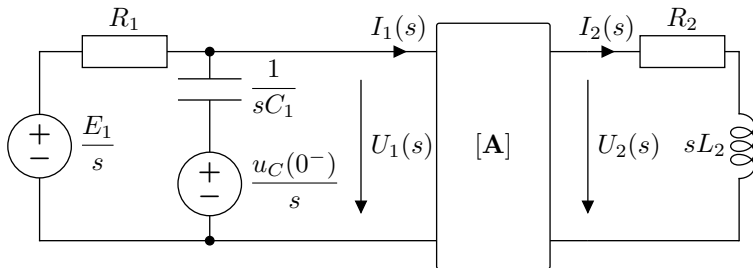
$$\Rightarrow \text{Xác lập cũ là mạch phân áp: } u_1(0^-) = E_1 \frac{R_{\text{vào}}}{R_{\text{vào}} + R_1} = 12 \text{ V}$$



Giải mạch tuyến tính quá độ bằng toán tử Laplace

Ví dụ 1.11: Mạch quá độ với mạng hai cửa

2. Ảnh Laplace của mạch điện sau chuyển mạch



3. Giải mạch trên miền ảnh Laplace “như mạch xác lập”

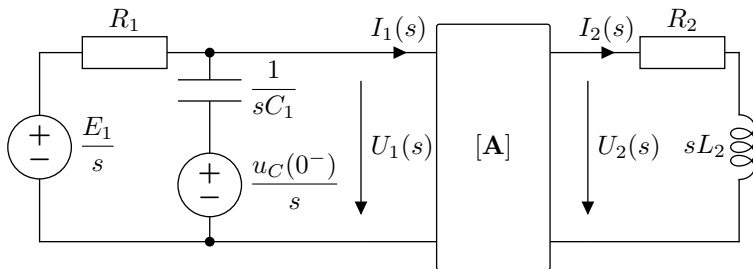
- Tổng trở vào của mạng hai cửa và tải RL :

$$Z_{\text{vào}} = \frac{a_{11}(R_2 + sL_2) + a_{12}}{a_{21}(R_2 + sL_2) + a_{22}} = \frac{4s + 36}{s + 10} \Omega$$



Giải mạch tuyến tính quá độ bằng toán tử Laplace

Ví dụ 1.11: Mạch quá độ với mạng hai cửa



- Giải mạch với biến điện thế nút $U_1(s)$:

$$U_1(s) = \frac{\frac{E_1}{sR_1} + C_1 \cdot u_C(0^-)}{\frac{1}{R_1} + sC_1 + \frac{1}{Z_{\text{vào}}}} = \frac{(3s + 9)(4 + 36)}{s(s^2 + 12s + 28)} \text{ V}$$



Giải mạch tuyến tính quá độ bằng toán tử Laplace

Ví dụ 1.11: Mạch quá độ với mạng hai cửa

4. Biến đổi Laplace ngược tìm tín hiệu gốc

- Ảnh Laplace của điện áp trên tụ: $U_1(s) = \frac{(3s + 9)(4s + 36)}{s(s^2 + 12s + 28)} \text{ V}$

- Đa thức mẫu số có 3 nghiệm thực: $s_0 = 0$;

$$s_1 = -6 + 2\sqrt{2} = -3,1716; s_2 = -6 - 2\sqrt{2} = -8,8284$$

- Dùng phương pháp thặng dư Heaviside tính ra được:

$$A_0 = 11,5714; A_1 = 0,6689; A_2 = -0,2403$$

$$\Rightarrow u_1(t) = 11,5714 + 0,6689e^{-3,1716t} - 0,2403e^{-8,8284t} \text{ V}$$

Chú ý



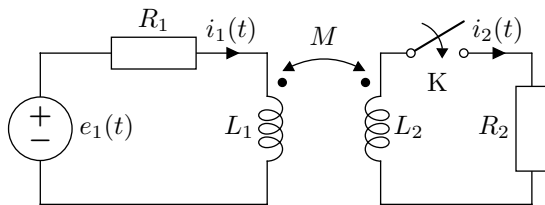
Mạng hai cửa trong bài toán mạch quá độ phải thuần trở. Nếu mạng có chứa L hoặc C thì không đủ thông tin để giải mạch.



Giải mạch tuyến tính quá độ bằng toán tử Laplace

Ví dụ 1.12: Mạch quá độ có hồ cảm

- $e_1(t) = 220\sqrt{2} \sin 314t \text{ V}$; $R_1 = 2 \Omega$; $L_1 = 0,01 \text{ H}$; $R_2 = 20 \Omega$;
 $L_2 = 0,02 \text{ H}$; $M = 0,012 \text{ H}$;



1. Tính sơ kiện $i_1(0^-)$ và $i_2(0^-)$

- Trước chuyển mạch $i_2(0^-) = 0 \text{ A}$
- $\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{R_1 + j\omega L_1} = 59,095 \angle -57,51^\circ \text{ A}$

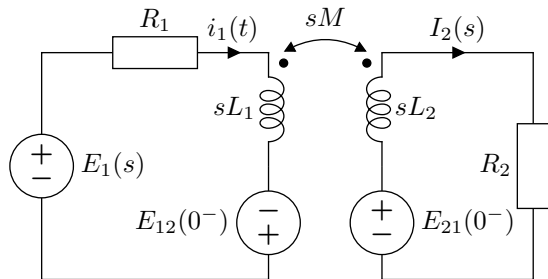
$$\Rightarrow i_1(0^-) = 59,095\sqrt{2} \sin(-57,51^\circ) = -49,846 \text{ A}$$



Giải mạch tuyến tính quá độ bằng toán tử Laplace

Ví dụ 1.12: Mạch quá độ có hồ cảm

2. Ảnh Laplace của mạch điện sau chuyển mạch



$$\bullet E_1(s) = \frac{220\sqrt{2} \cdot 314}{s^2 + 314^2} \text{ V}$$

$$\bullet E_{12}(0^-) = L_1 \cdot i_1(0^-) - M \cdot i_2(0^-) = -0,498 \text{ V}$$

$$\bullet E_{21}(0^-) = L_2 \cdot i_2(0^-) - M \cdot i_1(0^-) = 0,698 \text{ V}$$

3. Giải mạch trên miền ảnh Laplace (phương pháp dòng vòng/nhánh)

$$\begin{cases} I_1(s) \cdot (R_1 + sL_1) - I_2(s) \cdot sM = E_1(s) + E_{12}(0^-) \\ I_2(s) \cdot (R_2 + sL_2) - I_1(s) \cdot sM = E_{21}(0^-) \end{cases} \rightarrow \text{Giải và } \mathcal{L}^{-1}$$

LT Mạch 2: Quá độ – Phi tuyến – Đường dây dài

- 1 Mạch tuyến tính ở chế độ quá độ
 - Hiện tượng quá độ, mô hình trạng thái, và sơ kiện
 - Phương pháp tích phân kinh điển
 - Phương pháp toán tử Laplace
- 2 Mạch phi tuyến
 - Khái niệm mạch phi tuyến
 - Mạch phi tuyến xác lập một chiều
 - Mạch phi tuyến xác lập điều hoà
 - Mạch phi tuyến xác lập biến thiên tín hiệu nhỏ
 - Mạch phi tuyến ở chế độ quá độ
- 3 Đường dây dài
 - Khái niệm đường dây dài: mạch có thông số rải
 - Đường dây dài ở chế độ xác lập: truyền công suất
 - Đường dây dài ở chế độ quá độ: truyền sóng



Nội dung

2 Mạch phi tuyến

- Khái niệm mạch phi tuyến
- Mạch phi tuyến xác lập một chiều
 - Phương pháp đồ thị và phương pháp lặp
 - Phương pháp dò ngược
- Mạch phi tuyến xác lập điều hoà
 - Các hiện tượng cơ bản
 - Phương pháp cân bằng điều hoà (Giải trực tiếp)
 - Phương pháp điều hoà tương đương (Giải trên miền phức)
- Mạch phi tuyến xác lập biến thiên tín hiệu nhỏ
 - Các hiện tượng cơ bản
 - Tuyến tính hoá quanh điểm làm việc
- Mạch phi tuyến ở chế độ quá độ
 - Hiện tượng quá độ ở mạch phi tuyến
 - Phương pháp tuyến tính hoá từng đoạn
 - Phương pháp các bước sai phân liên tiếp



Khái niệm mạch phi tuyến

Nhắc lại về mạch tuyến tính

- Mạch tuyến tính là mạch có **tất cả các phần tử** đều là tuyến tính
- Phần tử tuyến tính là phần tử có **quan hệ đặc trưng là tuyến tính**
- Quan hệ tuyến tính là quan hệ thoả mãn **nguyên lý xếp chồng**

Khái niệm mạch phi tuyến

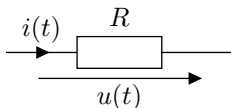
- Phần tử phi tuyến là phần tử có **quan hệ đặc trưng phi tuyến**
- Quan hệ phi tuyến **không** thoả mãn nguyên lý xếp chồng
- Mạch có **ít nhất một phần tử phi tuyến** là mạch phi tuyến
- Trong môn Lý thuyết Mạch, tạm thời chỉ xét các phần tử thụ động phi tuyến (các phần tử nguồn đều là tuyến tính)



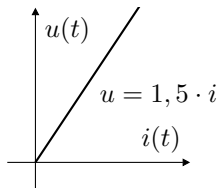
Điện trở phi tuyến

- Quan hệ đặc trưng tổng quát của điện trở: $u = f(i) \Rightarrow R = \frac{\partial u}{\partial i}$

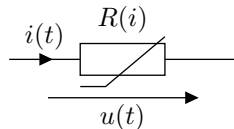
Điện trở tuyến tính



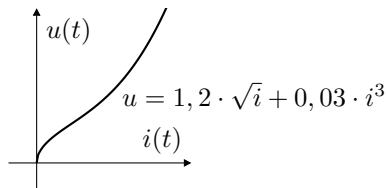
$$R_d = \frac{\partial u}{\partial i} = \text{const}$$



Điện trở phi tuyến



$$R = \frac{\partial u}{\partial i} = R(i)$$

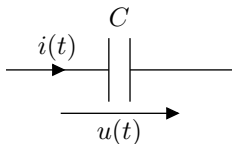




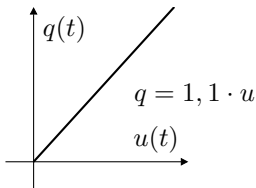
Tụ điện phi tuyến

- Quan hệ đặc trưng tổng quát của tụ điện: $q = f(u) \Rightarrow C = \frac{\partial q}{\partial u}$

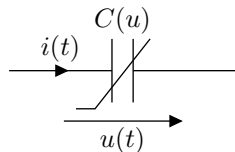
Tụ điện tuyến tính



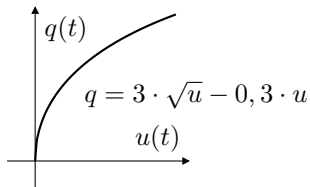
$$C = \frac{\partial q}{\partial u} = \text{const}$$



Tụ điện phi tuyến



$$C = \frac{\partial q}{\partial u} = C(u)$$

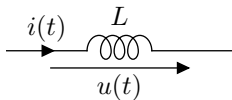




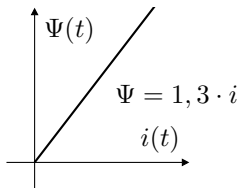
Cuộn dây phi tuyến

- Quan hệ đặc trưng tổng quát của cuộn dây: $\Psi = f(i) \Rightarrow L = \frac{\partial \Psi}{\partial i}$

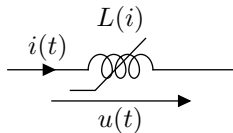
Cuộn dây tuyến tính



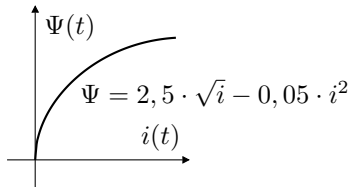
$$L = \frac{\partial \Psi}{\partial i} = \text{const}$$



Tụ điện phi tuyến



$$L = \frac{\partial \Psi}{\partial i} = L(i)$$

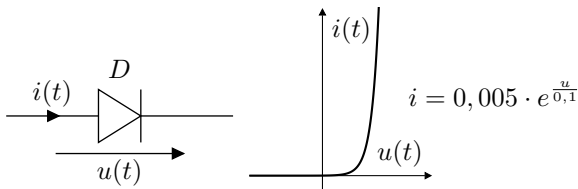




Phần tử bán dẫn

Diode

- Phần tử bán dẫn 2 cực
- Chỉ dẫn dòng điện theo một chiều (đặc tính không đối xứng)
- Khi phân cực thuận: giải mạch như điện trở phi tuyến
- Khi phân cực ngược: hở mạch

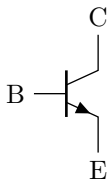




Phần tử bán dẫn

Transistor

- Phần tử bán dẫn 3 cực: Base, Collector, Emitter
- Tạm xét loại n-p-n
- Mạch BE như diode
- $i_C = \beta \cdot i_B$ (nguồn dòng phụ thuộc dòng)

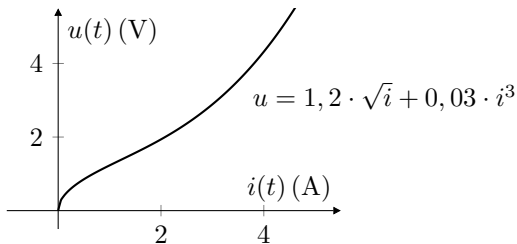




Tham số của các phần tử phi tuyến

Dạng mô tả quan hệ phi tuyến

- Dạng hàm số $u = f(i)$ hoặc $i = f(u)$
- Dạng đồ thị của các hàm số trên
- Dạng bảng dữ liệu thông số



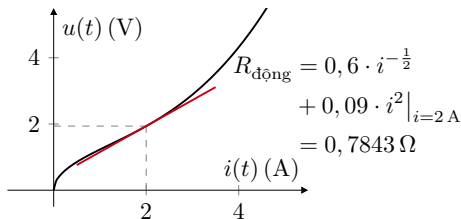
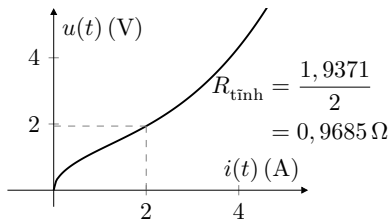
$i(t)$ (A)	0	1	2	3	4
$u(t)$ (V)	0	1,23	1,9371	2,8885	4,32



Tham số của các phần tử phi tuyến

Tham số tĩnh và tham số động

- Cho một quan hệ phi tuyến, có 2 thông tin chính về tham số của phần tử mà ta có thể khai thác được:
 - Tham số tĩnh: là tỷ lệ (tĩnh) giữa các đại lượng tại một điểm làm việc
 - Tham số động: là đạo hàm riêng thể hiện xu thế biến thiên (động) theo nhau của các đại lượng
- Ví dụ điện trở phi tuyến R có $u = 1,2 \cdot \sqrt{i} + 0,03 \cdot i^3$ tại $i = 2 \text{ A}$





Mạch phi tuyến và giải mạch phi tuyến

Hệ phương trình Kirchhoff của mạch phi tuyến

- Các định luật K1 và K2 trên miền thời gian vẫn đúng cho mạch phi tuyến
- Số phương trình K1 và K2 (xác định từ cấu trúc hình học) của mạch phi tuyến vẫn giống mạch tuyến tính
- Các phần tử tuyến tính trong mạch phi tuyến vẫn “hành xử” theo đúng quan hệ đặc trưng tuyến tính của chúng

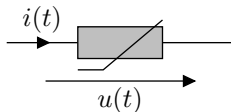
Giải mạch phi tuyến

- Các phương trình K1 và K2 + các quan hệ đặc trưng
→ hệ phương trình dòng điện nhánh
- Hệ phương trình dòng nhánh của mạch phi tuyến là hệ phương trình phi tuyến → **Giải gần đúng bằng các phương pháp số**



Mạch phi tuyến và giải mạch phi tuyến

Công suất trong mạch phi tuyến



- Công suất tiêu thụ tức thời: $p(t) = u(t) \cdot i(t)$
- Công suất phát tức thời: $p_{\text{phát}}(t) = -p(t)$
- Công suất trung bình: $P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$



Nội dung

2 Mạch phi tuyến

- Khái niệm mạch phi tuyến
- Mạch phi tuyến xác lập một chiều
 - Phương pháp đồ thị và phương pháp lặp
 - Phương pháp dò ngược
- Mạch phi tuyến xác lập điều hoà
 - Các hiện tượng cơ bản
 - Phương pháp cân bằng điều hoà (Giải trực tiếp)
 - Phương pháp điều hoà tương đương (Giải trên miền phức)
- Mạch phi tuyến xác lập biến thiên tín hiệu nhỏ
 - Các hiện tượng cơ bản
 - Tuyến tính hoá quanh điểm làm việc
- Mạch phi tuyến ở chế độ quá độ
 - Hiện tượng quá độ ở mạch phi tuyến
 - Phương pháp tuyến tính hoá từng đoạn
 - Phương pháp các bước sai phân liên tiếp



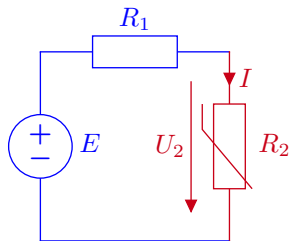
Mạch phi tuyến xác lập với nguồn một chiều

- Khi mạch phi tuyến ở chế độ xác lập với nguồn một chiều, các tín hiệu dòng và áp đều là hằng số $u(t) = U; i(t) = I$
- ⇒ Các phần tử tích lũy năng lượng (kho điện và kho từ) đều suy biến
- Cuộn dây: $u = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial i} \cdot \frac{di}{dt} \Big|_{i=\text{const}} = 0 \text{ V} \rightarrow$ Ngắn mạch
 - Tụ điện: $i = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} \Big|_{u=\text{const}} = 0 \text{ A} \rightarrow$ Hở mạch
- Mạch phi tuyến một chiều tương đương mạch thuần trở
- Hệ phương trình phi tuyến tĩnh, không chứa các đạo hàm và tích phân theo thời gian

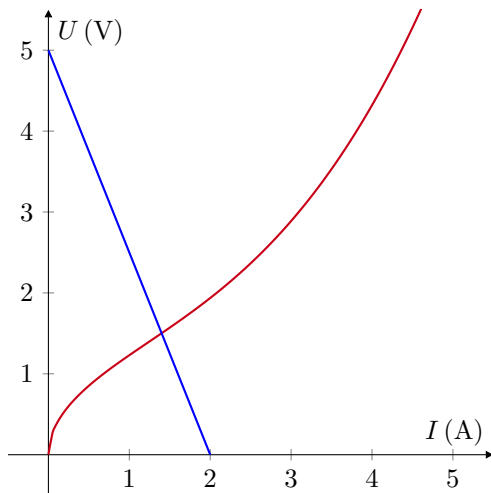
Giải mạch phi tuyến xác lập một chiều

Ví dụ dẫn nhập

- $E = 5\text{ V}$; $R_1 = 2,5\ \Omega$;
 R_2 có đặc tính
 $u = 1,2 \cdot \sqrt{i} + 0,03 \cdot i^3$



- Phương pháp đồ thị

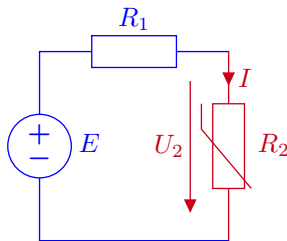




Giải mạch phi tuyến xác lập một chiều

Ví dụ dẫn nhập

- $E = 5 \text{ V}$; $R_1 = 2,5 \Omega$;
 R_2 có đặc tính
 $u = 1,2 \cdot \sqrt{i} + 0,03 \cdot i^3$



- Phương pháp lặp
- Cho dạng $x = f(x)$

- Từ luật K2 có: $R_1 \cdot I + U_2 = E$
 $\Rightarrow I = \frac{5}{2,5} - \frac{1,2}{2,5} \sqrt{I} - \frac{0,03}{2,5} I^3$

- Khởi đầu với $I_0 = 1 \text{ A}$:

$$1. \quad I_1 = \frac{5}{2,5} - \frac{1,2}{2,5} \sqrt{I_0} - \frac{0,03}{2,5} I_0^3 = 1,058 \text{ A}$$

...

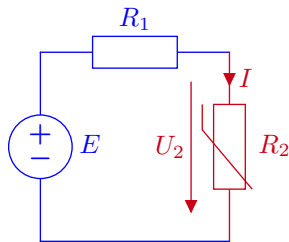
$$7. \quad I_7 = \frac{5}{2,5} - \frac{1,2}{2,5} \sqrt{I_6} - \frac{0,03}{2,5} I_6^3 = 1,3994 \text{ A}$$

$$8. \quad I_8 = \frac{5}{2,5} - \frac{1,2}{2,5} \sqrt{I_7} - \frac{0,03}{2,5} I_7^3 = 1,3993 \text{ A}$$

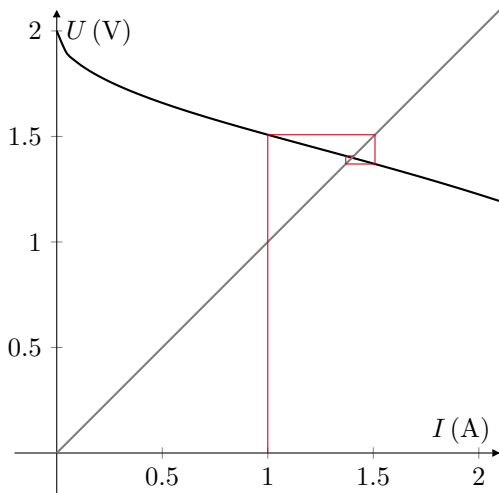
Giải mạch phi tuyến xác lập một chiều

Ví dụ dẫn nhập

- $E = 5\text{ V}; R_1 = 2,5\ \Omega;$
 R_2 có đặc tính
 $u = 1,2 \cdot \sqrt{i} + 0,03 \cdot i^3$



- Phương pháp lặp
- Cho dạng $x = f(x)$



Bài tập





Phương pháp dò ngược: Tư tưởng của phương pháp

Nhận xét về phương pháp lặp

- Là một phương pháp có tính hệ thống
- Dài và khó nếu mạch có nhiều nhánh, nhiều phần tử phi tuyến
- Về bản chất là một phương pháp số tìm xấp xỉ nghiệm phương trình phi tuyến kiểu “xuôi”

Ý tưởng của phương pháp dò ngược

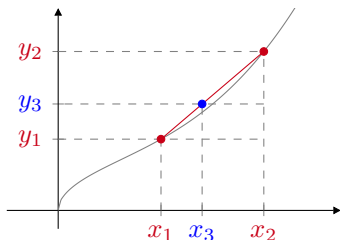
- Nhận thấy: giải phương trình phi tuyến để tìm nghiệm (tính “xuôi”) thường dài và khó; nhưng kiểm tra xem một số có phải là nghiệm của phương trình không (dò “ngược”) thường dễ hơn
- Ví dụ: tìm nghiệm của phương trình $2,5 \cdot i + 1,2 \cdot \sqrt{i} + 0,03 \cdot i^3 = 5$ với một sai số cho trước thì khó; nhưng kiểm tra xem $i = 1,4$ có thoả mãn phương trình không (với sai số bao nhiêu) thì dễ



Phương pháp dò ngược: Nội suy tuyến tính

- Trong quá trình dò, có những trường hợp ta cần tìm giá trị của một điểm nằm trong khoảng giữa 2 điểm đã biết
- Có thể “nội suy” ra giá trị nằm giữa đó. Nếu nội suy bằng một xấp xỉ tuyến tính → gọi là **nội suy tuyến tính**.
- Ngoài nội suy còn có thể “ngoại suy” nếu giá trị cần tính nằm ngoài khoảng đã biết.

Công thức nội suy tuyến tính (suy ra từ tỷ lệ tam giác đồng dạng)



- Nội suy tìm y_3 từ x_3

$$y_3 = y_1 + \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1)$$

- Nội suy tìm x_3 từ y_3

$$x_3 = x_1 + \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}(x_2 - x_1)$$

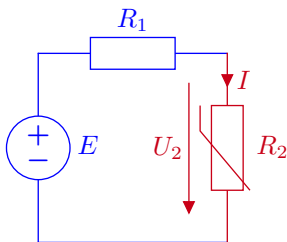


Giải mạch phi tuyến bằng phương pháp dò ngược

- Cách làm: Dò giá trị u hoặc i trên phần tử phi tuyến $\rightarrow$ dùng K1 và K2 tính ra giá trị nguồn điện tương ứng $\rightarrow$ lặp lại đến khi (gần) bằng giá trị nguồn đã cho. Sai số: $\varepsilon = (|E^{(k)} - E|/E) \cdot 100\%$

Ví dụ 2.1: Giải ví dụ dẫn nhập bằng phương pháp dò ngược

- $E = 5\text{ V}$; $R_1 = 2,5\ \Omega$;
 R_2 có đặc tính
 $u = 1,2 \cdot \sqrt{i} + 0,03 \cdot i^3$



- Lập bảng dò

k	I (A)	$E = R \cdot I + U_2$ (V)	ε (%)
1	1	3,73	25,4
2	2	6,9371	38,7
3	1,5	5,3209	6,4
4	1,3	4,6841	6,3

- Cách 1: Dò tiếp; Cách 2: Nội suy

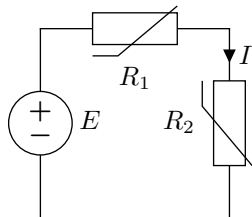
$$I = 1,3 + \frac{5 - 4,6841}{5,3209 - 4,6841} (1,5 - 1,3) = 1,3992\text{ A}$$

Giải mạch phi tuyến bằng phương pháp dò ngược

Ví dụ 2.2: Mạch có nhiều phần tử phi tuyến

- $E = 15 \text{ V}$;
- R_1 cho theo hàm:
 $u = 7 \cdot i + 0,5 \cdot i^3$;
- R_2 cho theo bảng:

$U \text{ (V)}$	0	5	12	20
$I \text{ (A)}$	0	1	2	3



- Lập bảng dò ($U \text{ (V)}$; $I \text{ (A)}$; $\varepsilon \text{ (%)}$)
- Bước 1: $U_2 = 5 \text{ V} \rightarrow$ tra bảng ra $I \rightarrow$ tính U_1 theo hàm $\rightarrow$ tính E

U_2	I	U_1	E	ε
5	1	7,5	12,5	16,7

- Bước 2: $U_2 = 7 \text{ V} \rightarrow$ nội suy từ bảng ra $I \rightarrow$ tính U_1 theo hàm $\rightarrow$ tính E

7	1,2857	10,0627	17,0627	13,8
---	--------	---------	---------	------

- Bước 3: $U_2 = 6 \text{ V} \rightarrow \dots$ tính E

6	1,1428	8,7463	14,7463	1,7
---	--------	--------	---------	-----

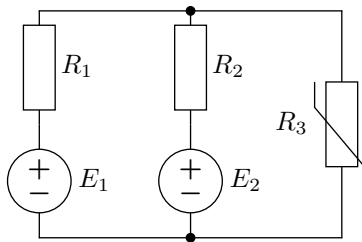
- Dò tiếp hoặc nội suy với $E = 15 \text{ V}$



Giải mạch phi tuyến bằng phương pháp dò ngược

Ví dụ 2.3: Mạch có nhiều nguồn

- $E_1 = 15\text{ V}; R_1 = 10\ \Omega;$
- $E_2 = 12\text{ V}; R_2 = 15\ \Omega;$
- Điện trở R_3 có đặc tính: $i = 0,1 \cdot u + 0,001 \cdot u^3$



- Cách giải mạch phi tuyến có nhiều nguồn:
Chọn một nguồn để dò, cố định các nguồn còn lại.

Bài tập





Nội dung

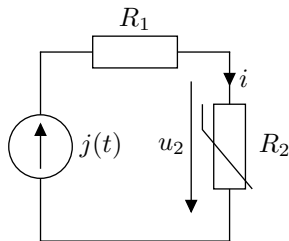
2 Mạch phi tuyến

- Khái niệm mạch phi tuyến
- Mạch phi tuyến xác lập một chiều
 - Phương pháp đồ thị và phương pháp lặp
 - Phương pháp dò ngược
- Mạch phi tuyến xác lập điều hoà
 - Các hiện tượng cơ bản
 - Phương pháp cân bằng điều hoà (Giải trực tiếp)
 - Phương pháp điều hoà tương đương (Giải trên miền phức)
- Mạch phi tuyến xác lập biến thiên tín hiệu nhỏ
 - Các hiện tượng cơ bản
 - Tuyến tính hoá quanh điểm làm việc
- Mạch phi tuyến ở chế độ quá độ
 - Hiện tượng quá độ ở mạch phi tuyến
 - Phương pháp tuyến tính hoá từng đoạn
 - Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

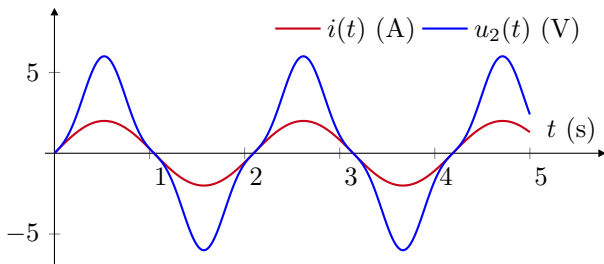
Hiện tượng sinh tần và triệt tần

- $j(t) = 2 \cdot \sin 3t$ (A)
- Điện trở phi tuyến R_2 có đặc tính:
 $u = i + 0,5 \cdot i^3$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow u_2 &= 2 \cdot \sin 3t + 0,5 \cdot (2^3 \cdot (\sin 3t)^3) \\
 &= 2 \cdot \sin 3t + 4 \cdot \frac{1}{4} (3 \sin 3t - \sin 9t) \\
 &= 5 \cdot \sin 3t - \sin 9t \text{ (V)}
 \end{aligned}$$



- Mạch phi tuyến có thể có dòng và áp mang tần số khác với nguồn (sinh tần)
- Hoặc không chứa tần số của nguồn (triệt tần)



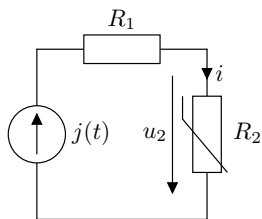


Định luật Kirchhoff với các thành phần tần số

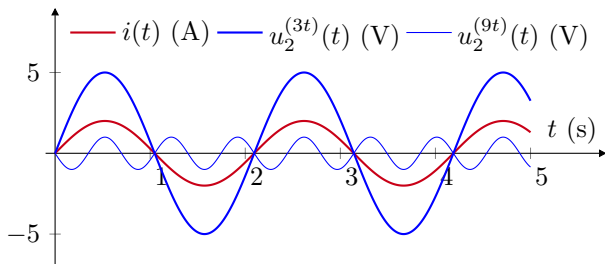
- Với toàn bộ tín hiệu, các định luật Kirchhoff vẫn bảo toàn:

$$\sum_{\text{nút}} i_k(t) = 0; \sum_{\text{vòng}} u_k(t) = 0$$

- Nếu chỉ quan tâm đến bài toán **cân bằng công suất**
 - Công suất phát của nguồn cân bằng** với công suất do các thành phần dòng và áp có **cùng tần số với nguồn** sinh ra
 - Chỉ cần xét thành phần tín hiệu có cùng tần số với nguồn



$$u_2 = 5 \sin 3t - \sin 9t$$





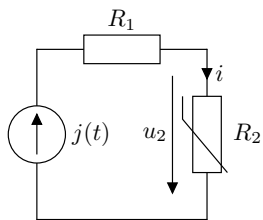
Định luật Kirchhoff với các thành phần tần số

Định luật Kirchhoff với thành phần tần số cơ bản

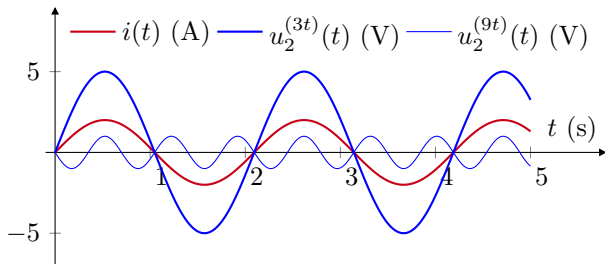
- Với từng thành phần tần số, các định luật Kirchhoff vẫn bảo toàn

$$\sum_{\text{nút}} i_k^{(\omega t)}(t) = 0$$

$$\sum_{\text{vòng}} u_k^{(\omega t)}(t) = 0$$



$$u_2 = 5 \sin 3t - \sin 9t$$





Phương pháp cân bằng điều hoà

Tư tưởng của phương pháp

- Mỗi tín hiệu điều hoà có 2 tham số đặc trưng (ngoài tần số)
Có thể biểu diễn dưới dạng $f = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

Hoặc dưới dạng $f = A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t)$

→ Xét thành phần tần số ωt

- Dùng các định luật Kirchhoff và biến đổi lượng giác, đưa hệ phương trình mạch về 1 trong 2 dạng:

$$A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) = A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$A_1 \cdot \sin(\omega t) + B_1 \cdot \cos(\omega t) = A_2 \cdot \sin(\omega t) + B_2 \cdot \cos(\omega t)$$

→ Đồng nhất thức:

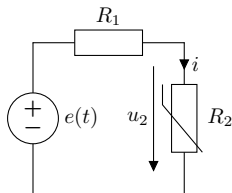
$$\begin{cases} A_1 = A_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A_1 = A_2 \\ B_1 = B_2 \end{cases}$$



Phương pháp cân bằng điều hoà

Ví dụ 2.4: Mạch thuần trở

- $e(t) = 10 \cdot \sin t$ (V)
- $R_1 = 5 \Omega$
- R_2 có $u = 5 \cdot i + 0,5 \cdot i^3$
- Tính dòng $i(t)$



- Nguồn $e(t)$ có $\omega = 1$ rad/s $\rightarrow$ chỉ xét thành phần $i^{(\omega t)}(t)$ có dạng:
 $i^{(\omega t)}(t) = I_0 \sin t$ (mạch thuần trở nên dòng và áp đồng pha)

$$\Rightarrow u_2^{(\omega t)}(t) = (5I_0 \sin t + 0,5I_0^3(\sin t)^3)^{(\omega t)}$$

$$= 5I_0 \sin t + 0,5 \cdot \frac{1}{4}I_0^3 \cdot (3 \sin t - \sin 3t)^{(\omega t)}$$

$$\Rightarrow u_2^{(\omega t)}(t) = (5I_0 + 0,375I_0^3) \sin t \text{ (V)}$$

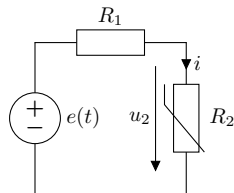
- $u_1^{(\omega t)}(t) = R_1 \cdot i^{(\omega t)}(t) = 5I_0 \sin t \text{ (V)}$



Phương pháp cân bằng điều hoà

Ví dụ 2.4: Mạch thuần trở

- $e(t) = 10 \cdot \sin t$ (V)
- $R_1 = 5 \Omega$
- R_2 có $u = 5 \cdot i + 0,5 \cdot i^3$
- Tính dòng $i(t)$



- $u_2^{(\omega t)}(t) = (5I_0 + 0,375I_0^3) \sin t$ (V); $u_1^{(\omega t)}(t) = 5I_0 \sin t$ (V)

- Từ luật K2: $e(t) = u_1^{(\omega t)}(t) + u_2^{(\omega t)}(t)$

$$\Rightarrow 10 \sin t = (10I_0 + 0,375I_0^3) \sin t$$

- Cân bằng thành phần biên độ điều hoà: $10 = 10I_0 + 0,375I_0^3$

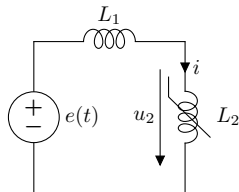
$$\Rightarrow \text{Giải phương trình có 1 nghiệm thực dương } I_0 = 0,966 \text{ A}$$

$$\Rightarrow \text{Điện áp và công suất} \Rightarrow \text{Cân bằng công suất?}$$

Phương pháp cân bằng điều hoà

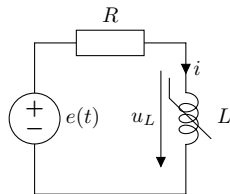
Ví dụ 2.5: Mạch thuần cảm (hoặc thuần dung)

- $e(t) = 10 \cdot \sin t$ (V)
- $L_1 = 1$ (H)
- L_2 có $\Psi = 2 \cdot i - 0,5 \cdot i^3$
- Tính dòng $i(t)$



Ví dụ 2.6: Mạch RL (hoặc RC)

- $e(t) = 10 \cdot \sin 5t$ (V)
- $R = 10 \Omega$
- L có $\Psi = 2 \cdot i + 0,5 \cdot i^3$
- Tính dòng $i(t)$





Phương pháp điều hoà tương đương

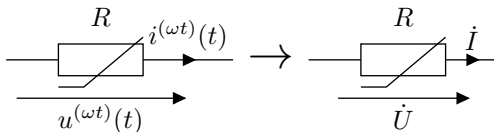
Tư tưởng của phương pháp

- Phương pháp cân bằng điều hoà đòi hỏi tính toán lượng giác phức tạp → nếu mạch có nhiều nhánh sẽ không thuận tiện
 - Nhớ lại mạch tuyến tính xác lập điều hoà: thay vì giải hàm lượng giác → dùng ảnh phức để giải “như mạch một chiều”
 - Mạch phi tuyến xác lập một chiều: dùng phương pháp dò ngược
- **Phương pháp điều hoà tương đương:** Dò ngược ảnh phức của thành phần tín hiệu có tần số cơ bản của nguồn
- Trình tự: **Dò biên độ trước, Đẩy (dịch) pha sau**



Ảnh phức của các phần tử phi tuyến

Ảnh phức của điện trở phi tuyến với tần số cơ bản



- $\dot{I} = I \angle \varphi \Rightarrow \dot{U} = R_{\text{tính}} \cdot \dot{I} = \frac{U(I)}{I} \cdot I \angle \varphi$

$$\Rightarrow \dot{U} = U(I) \angle \varphi$$

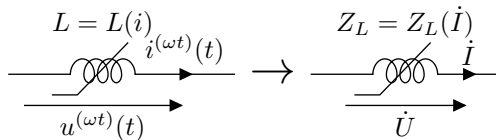
→ Từng thành phần tần số vẫn có dòng và áp cùng pha

- U, I là trị hiệu dụng; $U(I)$ là quan hệ phi tuyến của điện trở tính theo trị hiệu dụng



Ảnh phức của các phần tử phi tuyến

Ảnh phức của cuộn dây phi tuyến với tần số cơ bản



$$\bullet \quad \underline{\dot{I}} = I \angle \varphi \Rightarrow \dot{U} = Z_L \cdot \dot{I}$$

$$\bullet \quad Z_L = j\omega L_{\text{tinh}} = j\omega \frac{\Psi(I)}{I}$$

$$\Rightarrow \dot{U} = Z_L \cdot \dot{I} = j\omega \frac{\Psi(I)}{I} \dot{I} = j\omega \Psi(I) \angle \varphi = \omega \Psi(I) \angle \varphi + 90^\circ$$

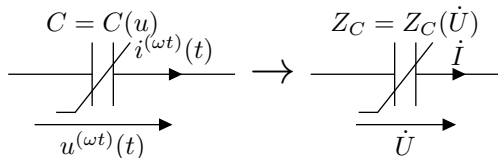
$\Rightarrow$ Từng thành phần tần số vẫn có dòng trễ pha 90° so với áp

- $\bullet \quad \Psi(I)$ là quan hệ phi tuyến của cuộn dây tính theo trị hiệu dụng
- $\bullet \quad$ Quan hệ phi tuyến cũng có thể cho trực tiếp dưới dạng $U(I)$



Ảnh phức của các phần tử phi tuyến

Ảnh phức của tụ điện phi tuyến với tần số cơ bản



$$\bullet \dot{U} = U \angle \theta \Rightarrow \dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z_C} \text{ với } Z_C = \frac{1}{j\omega C_{\text{tinh}}} = \frac{1}{j\omega \frac{Q(U)}{U}} = \frac{U}{j\omega Q}$$

$$\Rightarrow \dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z_C} = j\omega Q(U) \angle \theta = \omega Q(U) \angle \theta + 90^\circ$$

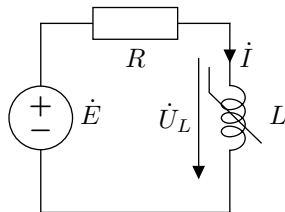
$\Rightarrow$ Từng thành phần tần số vẫn có áp trễ pha 90° so với dòng

- $Q(U)$ là quan hệ phi tuyến của tụ điện tính theo trị hiệu dụng
- Quan hệ phi tuyến cũng có thể cho trực tiếp dưới dạng $I(U)$

Phương pháp điều hoà tương đương

Ví dụ 2.7: Mạch RL

- $\dot{E} = 12\angle 0^\circ$ (V)
- $R = 10\ \Omega$
- L có quan hệ trị hiệu dụng
 $U = 2 \cdot I + 0,5 \cdot I^3$
- Tính dòng $\dot{I}$
- Quy trình dò: Từ $\dot{I}$ tính ra $\dot{E}$; cho góc ban đầu của $\dot{I} = I\angle 0^\circ$
 $I\angle 0^\circ \rightarrow \dot{U}_L = U_L(I)\angle 90^\circ \rightarrow \dot{U}_R = R \cdot I\angle 0^\circ \rightarrow \dot{E} = \dot{U}_R + \dot{U}_L$
- Lập bảng dò:



$\dot{I}$ (A)	$\dot{U}_L$ (V)	$\dot{U}_R$ (V)	$\dot{E}$ (V)
$1\angle 0^\circ$	$2,5\angle 90^\circ$	$10\angle 0^\circ$	$10,3078\angle 14,04^\circ$
$1,2\angle 0^\circ$	$3,264\angle 90^\circ$	$12\angle 0^\circ$	$12,436\angle 15,22^\circ$



Phương pháp điều hoà tương đương

Ví dụ 2.7: Mạch RL

$\dot{I}$ (A)	$\dot{U}_L$ (V)	$\dot{U}_R$ (V)	$\dot{E}$ (V)
$1/\underline{0^\circ}$	$2,5/\underline{90^\circ}$	$10/\underline{0^\circ}$	$10,3078/\underline{14,04^\circ}$
$1,2/\underline{0^\circ}$	$3,264/\underline{90^\circ}$	$12/\underline{0^\circ}$	$12,436/\underline{15,22^\circ}$

- Nội suy trị hiệu dụng $E = 12 \text{ V} \rightarrow I$:

$$I = 1 + \frac{12 - 10,3078}{12,4036 - 10,3078}(1,2 - 1) = 1,159 \text{ A}$$

- Đưa vào bảng dò tính lại $\dot{E}$

$\dot{I}$ (A)	$\dot{U}_L$ (V)	$\dot{U}_R$ (V)	$\dot{E}$ (V)
$1,159/\underline{0^\circ}$	$3,0964/\underline{90^\circ}$	$11,59/\underline{0^\circ}$	$11,9965/\underline{14,96^\circ}$

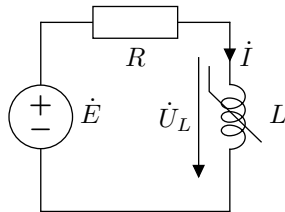
→ Trị hiệu dụng đạt yêu cầu; Bước tiếp theo: **đẩy (dịch) pha**



Phương pháp điều hoà tương đương

Ví dụ 2.7: Mạch RL

- $\dot{E} = 12\angle 0^\circ$ (V)
- $R = 10\ \Omega$
- L có quan hệ trị hiệu dụng
 $U = 2 \cdot I + 0,5 \cdot I^3$
- Tính dòng $\dot{I}$



$\dot{I}$ (A)	$\dot{U}_L$ (V)	$\dot{U}_R$ (V)	$\dot{E}$ (V)
$1,159\angle 0^\circ$	$3,0964\angle 90^\circ$	$11,59\angle 0^\circ$	$11,9965\angle 14,96^\circ$

→ **Trị hiệu dụng** đạt yêu cầu; Bước tiếp theo: **đẩy (dịch) pha**

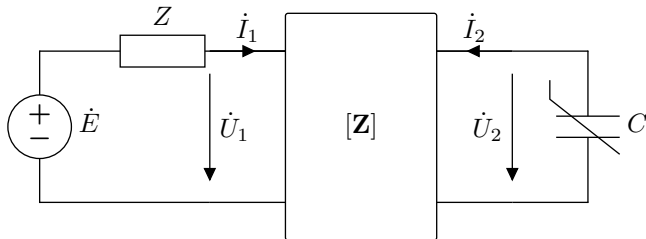
- Nhận xét: Nếu tăng góc pha ban đầu của $\dot{I} = 1,159\angle \varphi^\circ$ thì góc pha của nguồn sẽ tăng tương ứng $\dot{E} = 11,9965\angle 14,96^\circ + \varphi^\circ$

→ Để có $\angle \dot{E} = 0^\circ \Rightarrow \varphi = -14,96^\circ \Rightarrow \dot{I} = 1,159\angle -14,96^\circ$ A

Phương pháp điều hoà tương đương

Ví dụ 2.8: Tụ điện phi tuyến với mạng hai cửa, tính $\dot{I}_2$

- $\dot{E} = 220\angle 0^\circ \text{ V}$
- $\omega = 314 \text{ rad/s}$
- $Z = 10 + j20 \Omega$
- Mạng $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 30 & j20 \\ j20 & 50 \end{bmatrix} \Omega$



- Tụ điện phi tuyến C có bảng đặc tính theo trị hiệu dụng:

$Q \text{ (mC)}$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
$U \text{ (V)}$	0	3	6	10	16	50	80	120

- Dò theo $\dot{U}_C = U_C\angle 0^\circ \rightarrow$ Tụ phi tuyến: $\dot{I}_2 = \omega \cdot Q(U_C)\angle 90^\circ$
(Chú ý: $\dot{U}_C = -\dot{U}_2$)



Phương pháp điều hoà tương đương

Ví dụ 2.8: Tụ điện phi tuyến với mạng hai cửa, tính $\dot{I}_2$

- $\dot{E} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$

$Q \text{ (mC)}$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
$U \text{ (V)}$	0	3	6	10	16	50	80	120

- Dò theo $\dot{U}_C = U_C \angle 0^\circ \rightarrow \dot{I}_2 = \omega \cdot Q(U_C) \angle 90^\circ$ (Chú ý: $\dot{U}_C = -\dot{U}_2$)

- Quy trình dò:

$$\dot{U}_C \rightarrow \dot{I}_2 \rightarrow \dot{I}_1 = \frac{-\dot{U}_C - z_{22}\dot{I}_2}{z_{21}} \rightarrow \dot{U}_1 = z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2 \rightarrow \dot{E} = \dot{U}_1 + Z\dot{I}_1$$

$\dot{U}_C \text{ (V)}$	$\dot{I}_2 \text{ (A)}$	$\dot{I}_1 \text{ (A)}$	$\dot{U}_1 \text{ (V)}$	$\dot{E} \text{ (V)}$
$50 \angle 0^\circ$	$0,785 \angle 90^\circ$	$3,178 \angle 128,13^\circ$	$105,766 \angle 134,84^\circ$	$156,476 \angle 157,15^\circ$
$80 \angle 0^\circ$	$0,942 \angle 90^\circ$	$4,642 \angle 120,49^\circ$	$149,695 \angle 126,71^\circ$	$223,629 \angle 149,68^\circ$

- Dịch pha:

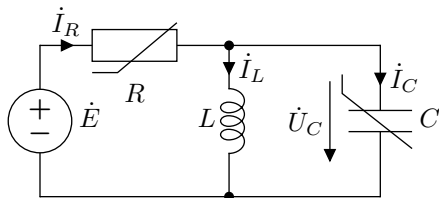
$$\dot{I}_2 = 0,942 \angle \varphi \Rightarrow \varphi = 90^\circ + (0^\circ - 149,68^\circ) \Rightarrow \dot{I}_2 = 0,942 \angle -59,68^\circ \text{ A}$$



Phương pháp điều hoà tương đương

Ví dụ 2.9: Mạch có nhiều nhánh và nhiều phần tử phi tuyến

- $e(t) = 12\sqrt{2} \sin(10t) \text{ V}$
- $L = 1 \text{ H}$
- R phi tuyến: $U = 7I + 0,8I^3$
- C phi tuyến: $U = 2I + 0,5I^3$
- Tính $\dot{I}_C$



- $\dot{E} = 12\angle 0^\circ$; $Z_L = j10 \Omega$. Quy trình dò:

$$\dot{I}_C \rightarrow \dot{U}_C \rightarrow \dot{I}_L = \frac{\dot{U}_C}{Z_C} \rightarrow \dot{I}_R = \dot{I}_L + \dot{I}_C \rightarrow \dot{U}_R \rightarrow \dot{E} = \dot{U}_R + \dot{U}_C$$

$\dot{I}_C \text{ (A)}$	$\dot{U}_C \text{ (V)}$	$\dot{I}_L \text{ (A)}$	$\dot{I}_R \text{ (A)}$	$\dot{U}_R \text{ (V)}$	$\dot{E} \text{ (V)}$
$1,5\angle 0^\circ$	$4,688\angle -90^\circ$	$0,469\angle 180^\circ$	$1,031\angle 0^\circ$	$8,096\angle 0^\circ$	$9,355\angle -30,07^\circ$
$2\angle 0^\circ$	$8\angle 90^\circ$	$0,8\angle 180^\circ$	$1,2\angle 0^\circ$	$9,782\angle 0^\circ$	$12,637\angle -39,28^\circ$



Phương pháp điều hoà tương đương

Ví dụ 2.9: Mạch có nhiều nhánh và nhiều phần tử phi tuyến

- $\dot{E} = 12/\underline{0^\circ}$; $Z_L = j10\Omega$. Quy trình dò:

$$\dot{I}_C \rightarrow \dot{U}_C \rightarrow \dot{I}_L = \frac{\dot{U}_C}{Z_C} \rightarrow \dot{I}_R = \dot{I}_L + \dot{I}_C \rightarrow \dot{U}_R \rightarrow \dot{E} = \dot{U}_R + \dot{U}_C$$

$\dot{I}_C$ (A)	$\dot{U}_C$ (V)	$\dot{I}_L$ (A)	$\dot{I}_R$ (A)	$\dot{U}_R$ (V)	$\dot{E}$ (V)
$1,5/\underline{0^\circ}$	$4,688/\underline{-90^\circ}$	$0,469/\underline{180^\circ}$	$1,031/\underline{0^\circ}$	$8,096/\underline{0^\circ}$	$9,355/\underline{-30,07^\circ}$
$2/\underline{0^\circ}$	$8/\underline{-90^\circ}$	$0,8/\underline{180^\circ}$	$1,2/\underline{0^\circ}$	$9,782/\underline{0^\circ}$	$12,637/\underline{-39,28^\circ}$

- Nội suy với $E = 12$ V: $I_C = 1,5 + \frac{12 - 9,355}{12,637 - 9,355}(2 - 1,5) = 1,903$ A

- Tiếp tục dò theo bảng:

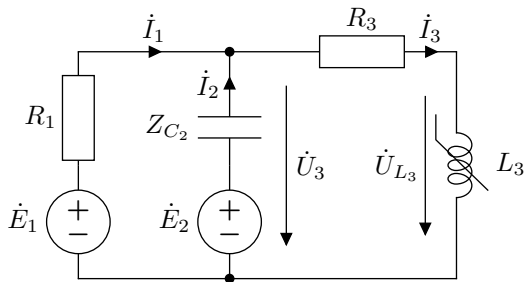
$\dot{I}_C$ (A)	$\dot{U}_C$ (V)	$\dot{I}_L$ (A)	$\dot{I}_R$ (A)	$\dot{U}_R$ (V)	$\dot{E}$ (V)
$1,903/\underline{0^\circ}$	$7,251/\underline{-90^\circ}$	$0,725/\underline{180^\circ}$	$1,178/\underline{0^\circ}$	$9,552/\underline{0^\circ}$	$11,992/\underline{-37,2^\circ}$

- Dịch pha với $\angle \dot{E} = 0^\circ \rightarrow \dot{I}_C = 1,903/\underline{37,2^\circ}$ A

Phương pháp điều hoà tương đương

Ví dụ 2.10: Mạch phi tuyến có nhiều nguồn – vấn đề dịch pha

- $\dot{E}_1 = 18/\underline{20^\circ}$ V
- $\dot{E}_2 = 12/\underline{30^\circ}$ V
- $R_1 = 10 \Omega$; $R_3 = 7 \Omega$
- $Z_{C_2} = -j5 \Omega$
- L_3 có: $U = 5I + 0,7I^3$
- Tính $\dot{I}_3$



- Nếu làm tương tự như mạch phi tuyến có nhiều nguồn một chiều: chọn một nguồn để dò theo trị hiệu dụng rồi dịch pha → **SAI**
- **Cách làm SAI:** Chọn $\dot{E}_1$ để dò: $\dot{I}_3 \rightarrow \dot{U}_{L_3} \rightarrow \dot{U}_3 = R_3 \dot{I}_3 + \dot{U}_{L_3} \rightarrow \dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2 - \dot{U}_3}{Z_{C_2}} \rightarrow \dot{E}_1 = R_1(\dot{I}_3 - \dot{I}_2) + \dot{U}_3$



Phương pháp điều hoà tương đương

Ví dụ 2.10: Mạch phi tuyến có nhiều nguồn – vấn đề dịch pha

- **Cách làm SAI:** Lập bảng dò theo $\dot{E}_1$

$\dot{I}_3$ (A)	$\dot{U}_{L_3}$ (V)	$\dot{U}_3$ (V)	$\dot{I}_2$ (A)	$\dot{E}_1$ (V)
$1/\underline{0^\circ}$	$5,7/\underline{90^\circ}$	$9,027/\underline{39,16^\circ}$	$1,259/\underline{-32,62^\circ}$	$17,633/\underline{-3,53^\circ}$
$1,2/\underline{0^\circ}$	$7,21/\underline{90^\circ}$	$11,07/\underline{40,64^\circ}$	$1,038/\underline{-22,58^\circ}$	$18,268/\underline{10,17^\circ}$

- Nội suy trị hiệu dụng: $I_3 = 1 + \frac{18-17,633}{18,268-17,633}(1,2-1) = 1,116$ A
- Đưa vào bảng dò tính lại $\dot{E}_1$

$\dot{I}_3$ (A)	$\dot{U}_{L_3}$ (V)	$\dot{U}_3$ (V)	$\dot{I}_2$ (A)	$\dot{E}_1$ (V)
$1,116/\underline{0^\circ}$	$6,553/\underline{90^\circ}$	$10,196/\underline{39,99^\circ}$	$1,13/\underline{-27,17^\circ}$	$17,919/\underline{4,46^\circ}$

- $E_1 = 17,919 \approx 18$ V $\rightarrow$ Dịch pha: $\dot{I}_3 = 1,116/\underline{15,54^\circ}$ A **Kết quả SAI**
- Kiểm tra: thay lại vào bảng dò $\rightarrow \dot{E}_1 = 11,906/\underline{10,42^\circ} \neq 18/\underline{20^\circ}$ V
- **Cách làm ĐÚNG:** Dùng Thévenin–Norton $\rightarrow$ dò theo $\dot{E}_{Th}$ hoặc $\dot{I}_N$
 $\rightarrow$ **Bài tập** (Nhưng nếu không tạo được mạng một cửa thì sao?)

Bài tập





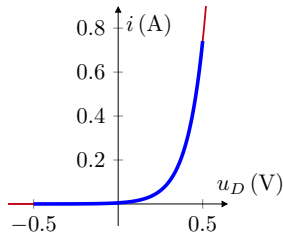
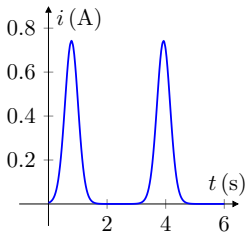
Nội dung

2 Mạch phi tuyến

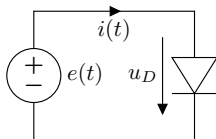
- Khái niệm mạch phi tuyến
- Mạch phi tuyến xác lập một chiều
 - Phương pháp đồ thị và phương pháp lặp
 - Phương pháp dò ngược
- Mạch phi tuyến xác lập điều hoà
 - Các hiện tượng cơ bản
 - Phương pháp cân bằng điều hoà (Giải trực tiếp)
 - Phương pháp điều hoà tương đương (Giải trên miền phức)
- Mạch phi tuyến xác lập biến thiên tín hiệu nhỏ
 - Các hiện tượng cơ bản
 - Tuyến tính hoá quanh điểm làm việc
- Mạch phi tuyến ở chế độ quá độ
 - Hiện tượng quá độ ở mạch phi tuyến
 - Phương pháp tuyến tính hoá từng đoạn
 - Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

Các hiện tượng cơ bản

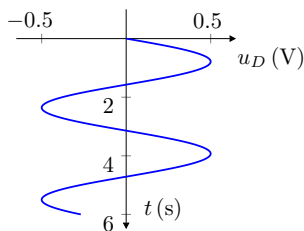
Ví dụ dẫn nhập: Mạch diode với nguồn AC



$$i = 0,005 \cdot e^{\frac{u_D}{0,1}} \text{ (A)}$$

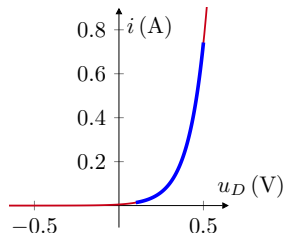
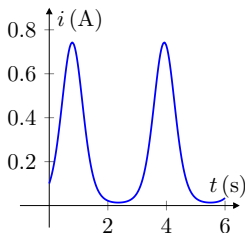


$$e(t) = 0,5 \cdot \sin 2t \text{ (V)}$$

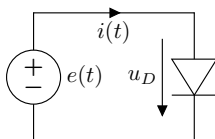


Các hiện tượng cơ bản

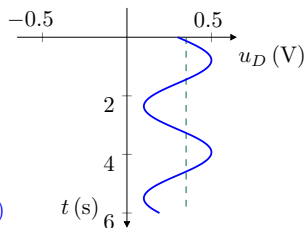
Ví dụ dẫn nhập: Mạch diode với nguồn DC + AC (có định thiên)



$$i = 0,005 \cdot e^{\frac{u_D}{0,1}} \text{ (A)}$$



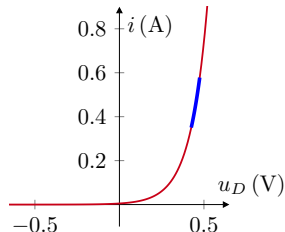
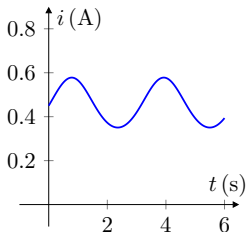
$$e(t) = 0,3 + 0,2 \cdot \sin 2t \text{ (V)}$$



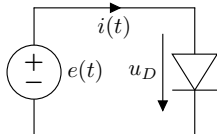


Các hiện tượng cơ bản

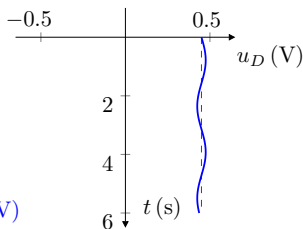
Ví dụ dẫn nhập: Mạch diode với nguồn DC + ac (tín hiệu nhỏ)



$$i = 0,005 \cdot e^{\frac{u_D}{0,1}} \text{ (A)}$$

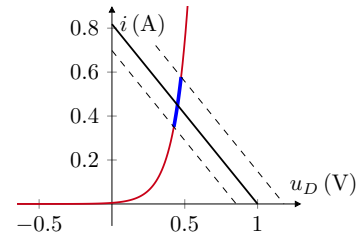
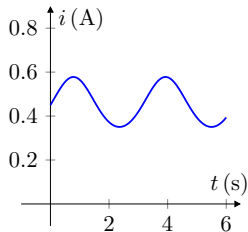


$$e(t) = 0,45 + 0,025 \cdot \sin 2t \text{ (V)}$$

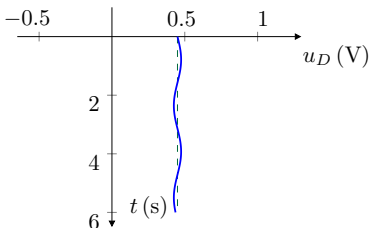


Các hiện tượng cơ bản

Ví dụ dẫn nhập: Xác định điểm làm việc DC + tuyến tính hoá ac



1. Cho thành phần DC tác động: giải mạch phi tuyến DC tìm điểm làm việc tĩnh

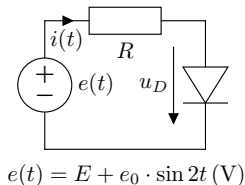


2. Tuyến tính hoá quanh điểm làm việc: tham số động

3. Giải mạch tuyến tính ac tín hiệu nhỏ

4. Tổng hợp nghiệm DC + ac

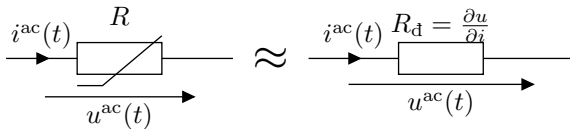
$$i = 0,005 \cdot e^{\frac{u_D}{0,1}} \text{ (A)}$$





Tuyến tính hoá quanh điểm làm việc

Điện trở



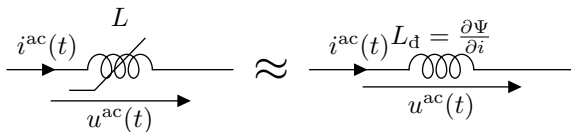
- R phi tuyến cho dưới dạng hàm $u = u(i) \rightarrow R_d = \left. \frac{\partial u}{\partial i} \right|_{i=I_{dc}}$
- R phi tuyến cho dưới dạng bảng số liệu:
 - Về bản chất đã là những khoảng tuyến tính hoá từng đoạn
 - Nếu điểm làm việc nằm giữa 2 điểm thứ k và $k + 1$:

$$R_d = \frac{u_{k+1} - u_k}{i_{k+1} - i_k}$$
- Lưu ý: mô hình tuyến tính hoá của điện trở phi tuyến có nguồn DC phát sinh, nhưng triệt tiêu khi chỉ xét tín hiệu ac $\rightarrow$ bỏ qua



Tuyến tính hoá quanh điểm làm việc

Cuộn dây

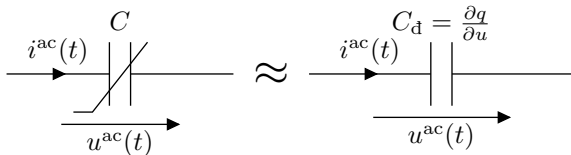


- L phi tuyến cho dưới dạng hàm $\Psi = \Psi(i) \rightarrow L_d = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial i} \right|_{i=I_{dc}}$
- L phi tuyến cho dưới dạng bảng số liệu: $L_d = \frac{\Psi_{k+1} - \Psi_k}{i_{k+1} - i_k}$
- L phi tuyến không có nguồn DC phát sinh như điện trở (vì sao?)



Tuyến tính hoá quanh điểm làm việc

Tụ điện



- C phi tuyến cho dưới dạng hàm $q = q(u) \rightarrow L_d = \left. \frac{\partial q}{\partial u} \right|_{u=U_{dc}}$
- C phi tuyến cho dưới dạng bảng số liệu: $C_d = \frac{q_{k+1} - q_k}{u_{k+1} - u_k}$
- C phi tuyến không có nguồn DC phát sinh như điện trở (vì sao?)

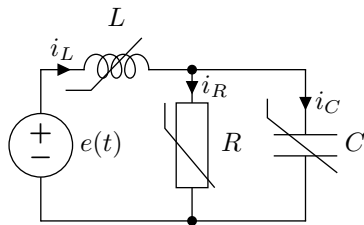


Phương pháp tuyến tính hoá quanh điểm làm việc

Ví dụ 2.11: Tính dòng điện do nguồn phát ra

- $e(t) = 12 + \sin t$ (V)
- R có: $u = 8 \cdot i + 0,5 \cdot i^3$
- L có: $\Psi = 2 \cdot i + 0,3 \cdot i^3$
- C có:

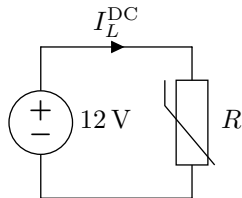
u (V)	0	6	17	21
q (C)	0	1	2	3



1. Xác định điểm làm việc tĩnh DC: Nguồn một chiều $E^{DC} = 12$ V tác động $\rightarrow$ cuộn dây và tụ điện suy biến

- $U_C^{DC} = 12 \text{ V} \Rightarrow 12 = 8 \cdot I_L^{DC} + 0,5 \cdot I_L^{DC3}$

$\Rightarrow$ Dò hoặc lặp $\rightarrow I_L^{DC} = I_R^{DC} = 1,3467 \text{ A}$





Phương pháp tuyến tính hoá quanh điểm làm việc

Ví dụ 2.11: Tính dòng điện do nguồn phát ra

2. Tuyến tính hoá quanh điểm làm việc: tính các tham số động

$$\bullet L_d = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial i} \right|_{i=I_L^{DC}} = 2 + 0,9i^2 \bigg|_{i=1,3467 \text{ A}} = 3,6322 \text{ H} \Rightarrow Z_{L_d} = j3,6322 \Omega$$

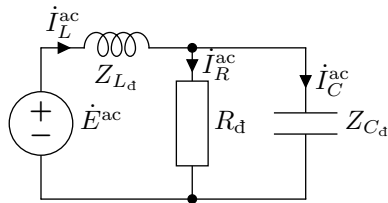
$$\bullet C_d = \left. \frac{\partial q}{\partial u} \right|_{u=U_C^{DC}} = \frac{2-1}{17-6} = 0,0909 \text{ F} \Rightarrow Z_{C_d} = -j11 \Omega$$

$$\bullet R_d = \left. \frac{\partial u}{\partial i} \right|_{i=I_R^{DC}} = 8 + 1,5i^2 \bigg|_{i=1,3467 \text{ A}} = 10,7204 \Omega$$

3. Giải mạch tuyến tính hoá ac

$$\bullet \dot{E}^{ac} = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\bullet \dot{I}_L^{ac} = \frac{\dot{E}^{ac}}{Z_{L_d} + \frac{R_d \cdot Z_{C_d}}{R_d + Z_{C_d}}} = 0,1227 \angle 17,43^\circ \text{ A}$$



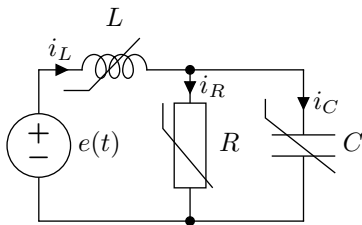


Phương pháp tuyến tính hoá quanh điểm làm việc

Ví dụ 2.11: Tính dòng điện do nguồn phát ra

- $e(t) = 12 + \sin t$ (V)
- R có: $u = 8 \cdot i + 0,5 \cdot i^3$
- L có: $\Psi = 2 \cdot i + 0,3 \cdot i^3$
- C có:

u (V)	0	6	17	21
q (C)	0	1	2	3



- $\dot{I}_L^{\text{ac}} = 0,1227 / 17,43^\circ \text{ A}$

$$\Rightarrow i_L^{\text{ac}} = 0,1735 \cdot \sin(t + 17,43^\circ) \text{ A}$$

4. Tổng hợp nghiệm:

- $i_L = I_L^{\text{DC}} + i_L^{\text{ac}} = 1,3467 + 0,1735 \cdot \sin(t + 17,43^\circ) \text{ A}$

Bài tập





Nội dung

2 Mạch phi tuyến

- Khái niệm mạch phi tuyến
- Mạch phi tuyến xác lập một chiều
 - Phương pháp đồ thị và phương pháp lặp
 - Phương pháp dò ngược
- Mạch phi tuyến xác lập điều hoà
 - Các hiện tượng cơ bản
 - Phương pháp cân bằng điều hoà (Giải trực tiếp)
 - Phương pháp điều hoà tương đương (Giải trên miền phức)
- Mạch phi tuyến xác lập biến thiên tín hiệu nhỏ
 - Các hiện tượng cơ bản
 - Tuyến tính hoá quanh điểm làm việc
- Mạch phi tuyến ở chế độ quá độ
 - Hiện tượng quá độ ở mạch phi tuyến
 - Phương pháp tuyến tính hoá từng đoạn
 - Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

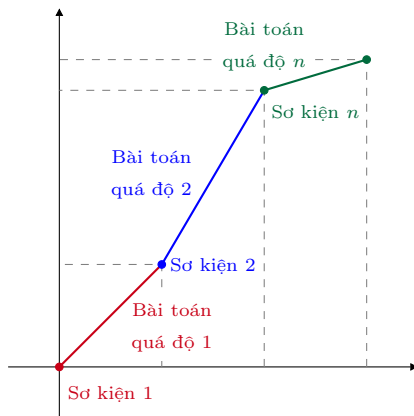


Hiện tượng quá độ ở mạch phi tuyến

- Là quá trình chuyển từ trạng thái xác lập này sang trạng thái xác lập khác. (Tổng quát: quá độ là khi không xác lập.)
- Quá trình chuyển trạng thái không tức thời do quán tính của các phần tử kho điện (tụ điện) và kho từ (cuộn dây)
- Giải mạch phi tuyến ở chế độ quá độ:
 - Xác định sơ kiện (bằng các định luật Kirchhoff, các định luật bảo toàn điện tích và từ thông)
 - Lập hệ phương trình trạng thái của mạch: hệ phương trình vi phân phi tuyến (bằng các định luật Kirchhoff và quan hệ đặc trưng của các phần tử)
 - Giải hệ phương trình vi phân phi tuyến
- Cách giải hệ phương trình vi phân phi tuyến: tính toán xấp xỉ
 1. Phương pháp tuyến tính hoá từng đoạn
 2. Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

Phương pháp tuyến tính hoá từng đoạn

- Xấp xỉ đặc tính phi tuyến thành các đoạn tuyến tính
- Giải mạch tuyến tính quá độ cho từng đoạn rồi tổng hợp nghiệm
- Chú ý: xác định sơ kiện tại đầu mỗi đoạn



Phương pháp tuyến tính hoá từng đoạn

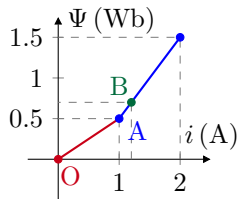
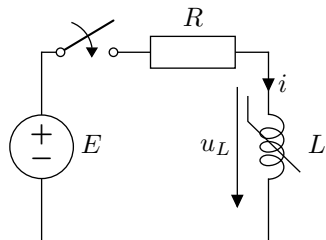
Ví dụ 2.12: Mạch phi tuyến RL quá độ

- $E = 12\text{ V}$
- $R = 10\ \Omega$
- L phi tuyến có đặc tính:

$\Psi\text{ (Wb)}$	0	0.5	1.5
$i\text{ (A)}$	0	1	2

- Chế độ xác lập cũ: $i(0) = 0\text{ A}$
- Chế độ xác lập mới: $i(\infty) = E/R = 1,2\text{ A}$

→ Trong quá trình quá độ, điểm làm việc “trượt” trên đoạn OAB gồm 2 đoạn tuyến tính OA và AB



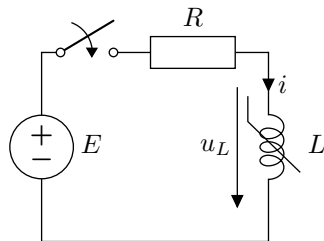


Phương pháp tuyến tính hoá từng đoạn

Ví dụ 2.12: Mạch phi tuyến RL quá độ

- $E = 12\text{ V}$
- $R = 10\ \Omega$
- L phi tuyến có đặc tính:

$\Psi\text{ (Wb)}$	0	0.5	1.5
$i\text{ (A)}$	0	1	2

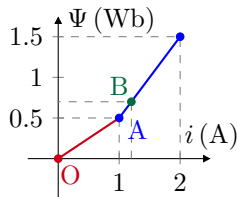


- Trên đoạn OA: $L_{OA} = \frac{\Psi(A) - \Psi(O)}{i(A) - i(O)} = 0,5\text{ H}$

- Sơ kiện: $i(0^-) = 0\text{ A}$

- Ảnh Laplace của dòng: $I_{OA} = \frac{12}{s(0,5s + 10)}\text{ A}$

$$\Rightarrow i_{OA}(t) = 1,2 - 1,2e^{-20t}\text{ A}$$



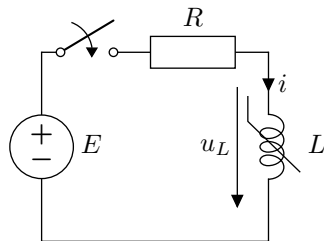


Phương pháp tuyến tính hoá từng đoạn

Ví dụ 2.12: Mạch phi tuyến RL quá độ

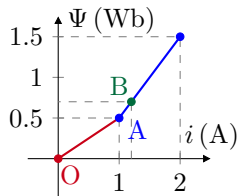
- $E = 12\text{ V}$
- $R = 10\ \Omega$
- L phi tuyến có đặc tính:

$\Psi\text{ (Wb)}$	0	0.5	1.5
$i\text{ (A)}$	0	1	2



- Trên đoạn AB: $L_{AB} = 1\text{ H}$
- Dịch trục thời gian $t' = t - t_A$
- Sơ kiện theo t' : $i(0^-) = i(\text{A}) = 1\text{ A}$
- Ảnh Laplace của dòng: $I_{AB} = \frac{12}{s(s+10)}\text{ A}$

$$\Rightarrow i_{AB}(t') = 1,2 - 1,2e^{-10t'}\text{ A}$$

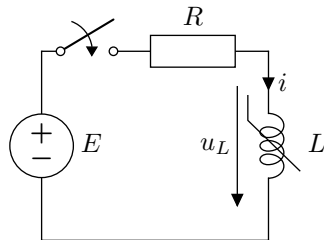


Phương pháp tuyến tính hoá từng đoạn

Ví dụ 2.12: Mạch phi tuyến RL quá độ

- $E = 12\text{ V}$
- $R = 10\ \Omega$
- L phi tuyến có đặc tính:

$\Psi\text{ (Wb)}$	0	0.5	1.5
$i\text{ (A)}$	0	1	2



- Tổng hợp nghiệm

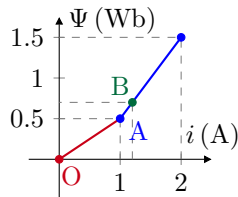
- Xác định t_A :

$$i_{OA}(t_A) = 1,2 - 1,2e^{-20t_A} = 1\text{ A}$$

$$\Rightarrow t_A = \frac{-1}{20} \ln(1 - 1/1,2) = 0,0896\text{ s}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} i(t) = 1,2 - 1,2e^{-20t}\text{ A với } 0 \leq t \leq 0,0896 \\ i(t) = 1,2 - 1,2e^{-10(t-0,0896)}\text{ A với } t \geq 0,0896 \end{cases}$$



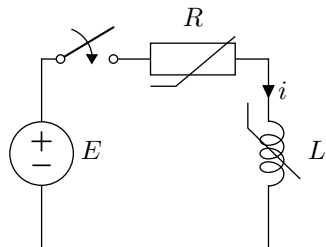
Phương pháp tuyến tính hoá từng đoạn

Ví dụ 2.13: Mạch quá độ có nhiều phần tử phi tuyến

- $E = 12\text{ V}$
- R và L phi tuyến có đặc tính:

$u\text{ (V)}$	0	10	15
$i\text{ (A)}$	0	0,8	1,6

$\Psi\text{ (Wb)}$	0	0.5	1.5
$i\text{ (A)}$	0	1	2



- Cách làm:
 - Tính dòng điện xác lập mới: giải mạch phi tuyến xác lập một chiều được nghiệm $i(\infty) = 1,12\text{ A}$
 - Khi điểm làm việc có dòng điện “trượt” từ 0 đến 1,12 A, nó đi qua 3 đoạn: $0 \rightarrow 0,8 \rightarrow 1 \rightarrow 1,12\text{ A}$
 - Giải mạch tuyến tính quá độ cho từng đoạn rồi tổng hợp



Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

Tư tưởng của phương pháp

- Không cần tìm nghiệm quá độ dưới dạng hàm số “chính xác” (vì cũng chỉ là nghiệm của mạch xấp xỉ tuyến tính hoá từng đoạn)
- Thay vào đó, ta tìm từng điểm làm việc với từng bước tính theo thời gian $\rightarrow$ tập hợp các điểm làm việc là “hình dạng” gần đúng của nghiệm quá độ
- Cách làm
 - Dùng 2 định luật Kirchhoff và quan hệ đặc trưng của các phần tử $\rightarrow$ hệ phương trình vi phân phi tuyến của mạch
 - Xấp xỉ phương trình vi phân thành phương trình sai phân (sai phân hoá)
 - Đưa phương trình sai phân về dạng lặp: $x_{k+1} = f(x_k)$
 - Tính các bước lặp theo thời gian (bắt đầu từ sơ kiện (0^+))



Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

Sai phân hoá

- Từ định nghĩa đạo hàm: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta}$
- Với $\delta = h$ đủ nhỏ $\rightarrow$ xấp xỉ sai phân:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

- Sai phân cấp 2:

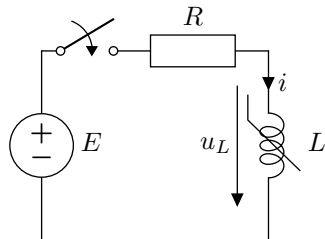
$$\begin{aligned} f'' &\approx \frac{\frac{f(x+h+h) - f(x+h)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{h} \\ &= \frac{f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)}{h^2} \end{aligned}$$

- Tương tự có thể tính các sai phân cấp tiếp theo

Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

Ví dụ 2.14: Mạch phi tuyến RL

- $E = 12\text{ V}$
- $R = 10\ \Omega$
- L phi tuyến có đặc tính:
 $\Psi = 2i + 0,5i^3$
- Bước lặp $h = 0,05\text{ s}$



- Cuộn dây phi tuyến: $u_L = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial i} \cdot \frac{di}{dt} = (2 + 1,5i^2) \frac{di}{dt}$

- Luật K2: $E = Ri + (2 + 1,5i^2) \frac{di}{dt}$

→ Sai phân hoá: $12 = Ri(t) + (2 + 1,5i^2) \frac{i(t+h) - i(t)}{h}$

Phương pháp các bước sai phân liên tiếp

Ví dụ 2.14: Mạch phi tuyến RL

- $E = 12 \text{ V}$
- $R = 10 \Omega$
- L phi tuyến có đặc tính:

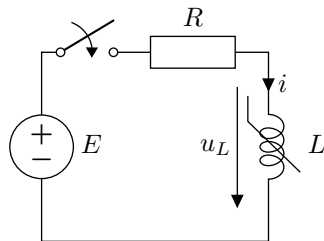
$$\Psi = 2i + 0,5i^3$$
- Bước lặp $h = 0,05 \text{ s}$
- Đưa phương trình sai phân về dạng lặp:

$$i(t+h) = \frac{(E - Ri(t))h}{2 + 1,5i(t)^2} + i(t)$$

- Sơ kiện: $i(0^+) = 0 \text{ A}$

$$\rightarrow i(h) = 0,3 \text{ A} \rightarrow i(2h) = 0,511 \text{ A} \rightarrow i(3h) = 0,655 \text{ A}$$

$$\rightarrow i(4h) = 0,758 \text{ A} \rightarrow \dots \text{ Ở mỗi bước có thể tính điện áp tương ứng}$$



Bài tập



LT Mạch 2: Quá độ – Phi tuyến – Đường dây dài

- 1 Mạch tuyến tính ở chế độ quá độ
 - Hiện tượng quá độ, mô hình trạng thái, và sơ kiện
 - Phương pháp tích phân kinh điển
 - Phương pháp toán tử Laplace
- 2 Mạch phi tuyến
 - Khái niệm mạch phi tuyến
 - Mạch phi tuyến xác lập một chiều
 - Mạch phi tuyến xác lập điều hoà
 - Mạch phi tuyến xác lập biến thiên tín hiệu nhỏ
 - Mạch phi tuyến ở chế độ quá độ
- 3 Đường dây dài
 - Khái niệm đường dây dài: mạch có thông số rải
 - Đường dây dài ở chế độ xác lập: truyền công suất
 - Đường dây dài ở chế độ quá độ: truyền sóng



Nội dung

3 Đường dây dài

- Khái niệm đường dây dài: mạch có thông số rải
 - Khái niệm
 - Mô hình, thông số, và quan hệ đặc trưng
- Đường dây dài ở chế độ xác lập: truyền công suất
 - Dòng và áp điều hoà trên đường dây dài
 - Hệ phương trình hyperbolic và mạng hai cửa tương đương
- Đường dây dài ở chế độ quá độ: truyền sóng
 - Đường dây dài không tiêu tán và sóng chạy trên dây
 - Mô hình Petersen cho sóng đánh tới cuối đường dây



Khái niệm đường dây dài

Mô hình trường điện từ

- Là mô hình tổng quát (cổ điển) của các hệ điện từ
- Các thông số và đại lượng biến thiên trong không gian và theo thời gian

Mô hình mạch thông số tập trung

- Khi kích thước hệ "đủ nhỏ" so với bước sóng điện từ thì coi như các thông số và đại lượng của hệ điện từ không biến thiên trong không gian
- Mô hình mạch với các phần tử có thông số tập trung

Mô hình mạch thông số rải

- Khi kích thước mạch "đáng kể" so với bước sóng điện từ
- Trường hợp thường gặp: đường dây truyền tín hiệu "đủ dài"
→ xét tham số thay đổi theo 1 chiều không gian



Khái niệm đường dây dài

Giới hạn áp dụng mô hình đường dây dài

- Khi chiều dài đường dây lớn hơn 5% bước sóng điện từ:

$$l \geq 5\% \lambda = 0,05 \frac{c}{f}$$

với $c = 3 \cdot 10^8$ m/s và f là tần số của tín hiệu

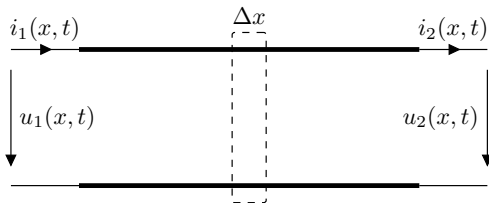
- Đường dây truyền tải điện: $f = 50$ Hz $\rightarrow$ bước sóng điện từ:
 $\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{50} = 6000$ km $\rightarrow$ Từ 300 km trở lên cần dùng mô hình đường dây dài
- Mạch cao tần: tần số FM $f = 100$ MHz $\rightarrow$ bước sóng điện từ:
 $\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{10^8} = 3$ m $\rightarrow$ dây tín hiệu 15 cm là đủ dài
- Mạch siêu cao tần: tần số mạng 4G $f = 2,5$ GHz $\rightarrow$ bước sóng điện từ: $\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{2,5 \cdot 10^9} = 12$ cm $\rightarrow$ kích thước 0,6 cm là đủ lớn



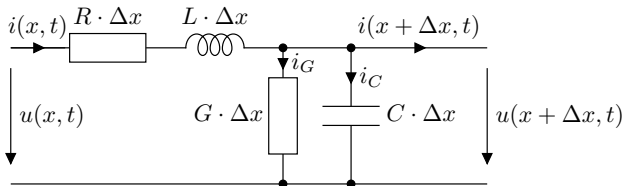
Mô hình đường dây dài: mạch điện tương đương

Mô hình mạch tương đương

- Xét đường dây dài có thông số rải đều tuyến tính



- Xét một đoạn Δx có mô hình mạch tương đương:



R : Ω /đơn vị dài

L : H/đơn vị dài

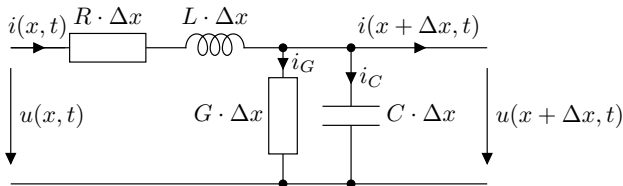
G : S/đơn vị dài

C : F/đơn vị dài



Mô hình đường dây dài: quan hệ đặc trưng

Quan hệ đặc trưng



R : Ω /đơn vị dài

L : H/đơn vị dài

G : S/đơn vị dài

C : F/đơn vị dài

• Luật Kirchhoff 1:

$$i(x, t) - i_G(x + \Delta x, t) - i_C(x + \Delta x, t) - i(x + \Delta x, t) = 0$$

$$\Leftrightarrow i(x, t) - G \cdot \Delta x \cdot u(x + \Delta x, t) - C \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial t} - i(x + \Delta x, t) = 0$$

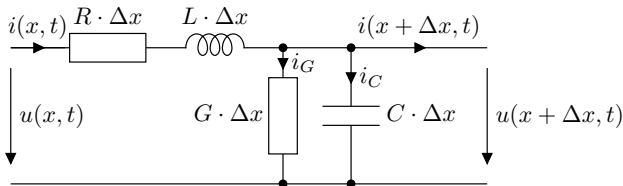
$$\Leftrightarrow -\frac{i(x + \Delta x, t) - i(x, t)}{\Delta x} = G \cdot u(x + \Delta x, t) + C \cdot \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial t}$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow -\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = G \cdot u(x, t) + C \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$



Mô hình đường dây dài: quan hệ đặc trưng

Quan hệ đặc trưng



$R : \Omega/\text{đơn vị dài}$

$L : \text{H}/\text{đơn vị dài}$

$G : \text{S}/\text{đơn vị dài}$

$C : \text{F}/\text{đơn vị dài}$

• Luật Kirchhoff 2:

$$u_R(x, t) + u_L(x, t) + u(x + \Delta x, t) - u(x, t) = 0$$

$$\Leftrightarrow R \cdot \Delta x \cdot i(x, t) + L \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + u(x + \Delta x, t) - u(x, t) = 0$$

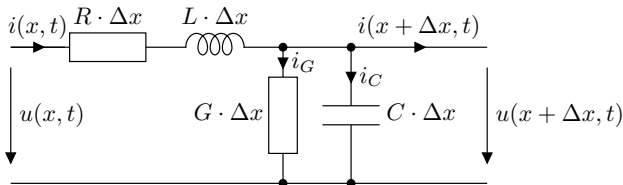
$$\Leftrightarrow -\frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = R \cdot i(x, t) + L \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow -\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = R \cdot i(x, t) + L \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$$



Mô hình đường dây dài: quan hệ đặc trưng

Quan hệ đặc trưng



R : Ω /đơn vị dài

L : H/đơn vị dài

G : S/đơn vị dài

C : F/đơn vị dài

- Hệ phương trình đặc tính của đường dây dài đều tuyến tính:

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = G \cdot u(x,t) + C \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = R \cdot i(x,t) + L \cdot \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$



Nội dung

3 Đường dây dài

- Khái niệm đường dây dài: mạch có thông số rải
 - Khái niệm
 - Mô hình, thông số, và quan hệ đặc trưng
- Đường dây dài ở chế độ xác lập: truyền công suất
 - Dòng và áp điều hoà trên đường dây dài
 - Hệ phương trình hyperbolic và mạng hai cửa tương đương
- Đường dây dài ở chế độ quá độ: truyền sóng
 - Đường dây dài không tiêu tán và sóng chạy trên dây
 - Mô hình Petersen cho sóng đánh tới cuối đường dây



Dòng và áp điều hoà trên đường dây dài

- Trên đường dây dài, các tín hiệu có trị hiệu dụng và góc pha thay đổi theo chiều dài:

$$u(x,t) = U(x)\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi(x)) \rightarrow \dot{U}(x) = U(x)/\underline{\varphi(x)}$$

$$i(x,t) = I(x)\sqrt{2}\sin(\omega t + \theta(x)) \rightarrow \dot{I}(x) = I(x)/\underline{\theta(x)}$$

- Nhận xét: ảnh phức chỉ là hàm theo biến $x \rightarrow$ đạo hàm theo biến này không ảnh hưởng đến biến kia

- Đạo hàm theo chiều dài: $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \longleftrightarrow \frac{d\dot{U}(x)}{dx}$

- Đạo hàm theo thời gian: $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \longleftrightarrow j\omega\dot{U}(x)$



Dòng và áp điều hoà trên đường dây dài

- Hệ phương trình đặc tính của đường dây dài đều tuyến tính:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = R \cdot i(x,t) + L \cdot \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \\ -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = G \cdot u(x,t) + C \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \end{cases}$$

- Áp dụng các công thức đạo hàm với tín hiệu điều hoà:

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{U}(x)}{dx} = R \cdot \dot{I}(x) + j\omega L \cdot \dot{I}(x) \\ -\frac{d\dot{I}(x)}{dx} = G \cdot \dot{U}(x) + j\omega C \cdot \dot{U}(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d\dot{U}(x)}{dx} = -(R + j\omega L)\dot{I}(x) = -Z \cdot \dot{I}(x) \\ \frac{d\dot{I}(x)}{dx} = -(G + j\omega C)\dot{U}(x) = -Y \cdot \dot{U}(x) \end{cases}$$

$Z = R + j\omega L$ là tổng trở dọc đường dây

$Y = G + j\omega C$ là tổng dẫn ngang đường dây



Dòng và áp điều hoà trên đường dây dài

- Cần tìm $\dot{U}(x)$ và $\dot{I}(x)$ từ hệ phương trình vi phân tuyến tính

$$\begin{cases} \frac{d\dot{U}(x)}{dx} = -Z \cdot \dot{I}(x) \\ \frac{d\dot{I}(x)}{dx} = -Y \cdot \dot{U}(x) \end{cases}$$

→ đạo hàm tiếp theo x

$$\begin{cases} \frac{d^2\dot{U}(x)}{dx^2} = -Z \cdot \frac{d\dot{I}(x)}{dx} \\ \frac{d^2\dot{I}(x)}{dx^2} = -Y \cdot \frac{d\dot{U}(x)}{dx} \end{cases}$$

- Thay chính đạo hàm cấp 1 vào phương trình vi phân cấp 2:

$$\begin{cases} \frac{d^2\dot{U}(x)}{dx^2} = ZY \cdot \dot{U}(x) \\ \frac{d^2\dot{I}(x)}{dx^2} = YZ \cdot \dot{I}(x) \end{cases}$$



Dòng và áp điều hoà trên đường dây dài

- Hệ hai phương trình vi phân cấp 2 thuần nhất độc lập

$$\begin{cases} \frac{d^2 \dot{U}(x)}{dx^2} = ZY \cdot \dot{U}(x) \\ \frac{d^2 \dot{I}(x)}{dx^2} = YZ \cdot \dot{I}(x) \end{cases}$$

- Đặt $ZY = \gamma^2$, dùng toán tử Heaviside lập đa thức đặc trưng:

$$p^2 = \gamma^2 \Leftrightarrow p = \pm \gamma \text{ với } \gamma = \alpha + j\beta \text{ là số phức}$$

$\Rightarrow$ Hệ phương trình có nghiệm (với các hệ số phức):

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 \cdot e^{\gamma x} \\ \dot{I}(x) = \dot{B}_1 \cdot e^{-\gamma x} + \dot{B}_2 \cdot e^{\gamma x} \end{cases}$$



Dòng và áp điều hoà trên đường dây dài

- Thay nghiệm vào hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{d\dot{U}(x)}{dx} = -Z \cdot \dot{I}(x) \\ \frac{d\dot{I}(x)}{dx} = -Y \cdot \dot{U}(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\gamma \dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \gamma \dot{A}_2 e^{\gamma x} = -Z \dot{B}_1 e^{-\gamma x} - Z \dot{B}_2 e^{\gamma x} \\ -\gamma \dot{B}_1 e^{-\gamma x} + \gamma \dot{B}_2 e^{\gamma x} = -Y \dot{A}_1 e^{-\gamma x} - Y \dot{A}_2 e^{\gamma x} \end{cases}$$

- Đồng nhất thức (cân bằng hệ số): $\dot{B}_1 = \frac{\gamma \dot{A}_1}{Z}$ và $\dot{B}_2 = -\frac{\gamma \dot{A}_2}{Z}$

- Đặt $\frac{Z}{\gamma} = Z_c \Rightarrow$ nghiệm có dạng:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 \cdot e^{\gamma x} \\ \dot{I}(x) = \frac{\dot{A}_1}{Z_c} \cdot e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}_2}{Z_c} \cdot e^{\gamma x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}^+(x) + \dot{U}^-(x) \\ \dot{I}(x) = \dot{I}^+(x) - \dot{I}^-(x) \end{cases}$$



Dòng và áp điều hoà trên đường dây dài

- Mối quan hệ giữa các phần tử: $\frac{\dot{U}^+(x)}{\dot{I}^+(x)} = \frac{\dot{U}^-(x)}{\dot{I}^-(x)} = Z_c$

$\Rightarrow Z_c$ gọi là tổng trở sóng của đường dây

- Bản chất của $\dot{U}^+(x)$, $\dot{U}^-(x)$, $\dot{I}^+(x)$, $\dot{I}^-(x)$ là gì?
- Xét thành phần $\dot{U}^+(x) = \dot{A}_1 \cdot e^{-\gamma x}$ với $\dot{A}_1 = A_1 e^{j\varphi_1}$ và $\gamma = \alpha + j\beta$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \dot{U}^+(x) &= A_1 e^{j\varphi_1} \cdot e^{-(\alpha + j\beta)x} \\ &= A_1 e^{-\alpha x} \cdot e^{j(-\beta x + \varphi_1)}\end{aligned}$$

$$\rightarrow u^+(x, t) = A_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \varphi_1)$$

là thành phần sóng thuận lan truyền với tốc độ $v = \frac{\omega}{\beta}$

- Tương tự với thành phần $\dot{U}^-(x)$ có hàm thời gian:

$$u^-(x, t) = A_1 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \varphi_2)$$

là thành phần sóng ngược lan truyền với tốc độ $v = \frac{\omega}{\beta}$



Dòng và áp điều hoà trên đường dây dài

Hệ số phản xạ sóng

- Hai thành phần sóng thuận và sóng ngược:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 \cdot e^{\gamma x} \\ \dot{I}(x) = \frac{\dot{A}_1}{Z_c} \cdot e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}_2}{Z_c} \cdot e^{\gamma x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}^+(x) + \dot{U}^-(x) \\ \dot{I}(x) = \dot{I}^+(x) - \dot{I}^-(x) \end{cases}$$

- Tại mỗi điểm trên đường dây, ta hình dung có một sóng tới (+) và một sóng phản xạ (-) trở lại
- Sự phản xạ này có thể không toàn phần mà chỉ phản xạ một phần
- Tỷ lệ giữa sóng phản xạ và sóng tới gọi là hệ số phản xạ:

$$n(x) = \frac{\dot{U}^-(x)}{\dot{U}^+(x)} = \frac{\dot{I}^-(x)}{\dot{I}^+(x)} = \frac{\dot{A}_2}{\dot{A}_1} e^{2\gamma x}$$

→ Hệ số phản xạ là một số phức



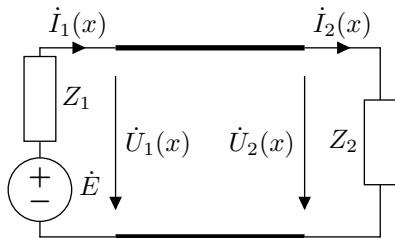
Dòng và áp điều hoà trên đường dây dài

Hệ số phản xạ sóng

$$n(x) = \frac{\dot{U}^-(x)}{\dot{U}^+(x)} = \frac{\dot{I}^-(x)}{\dot{I}^+(x)}$$

$$\dot{U}(x) = \dot{U}^+(x) + \dot{U}^-(x)$$

$$\begin{aligned} \dot{I}(x) &= \dot{I}^+(x) - \dot{I}^-(x) \\ &= \frac{\dot{U}^+(x)}{Z_c} - \frac{\dot{U}^-(x)}{Z_c} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \text{Tính ra } \dot{U}^+(x) = \frac{\dot{U}(x) + Z_c \cdot \dot{I}(x)}{2} \text{ và } \dot{U}^-(x) = \frac{\dot{U}(x) - Z_c \cdot \dot{I}(x)}{2}$$

$$\Rightarrow n(x) = \frac{\dot{U}(x) - Z_c \cdot \dot{I}(x)}{\dot{U}(x) + Z_c \cdot \dot{I}(x)} = \frac{\frac{\dot{U}(x)}{\dot{I}(x)} - Z_c}{\frac{\dot{U}(x)}{\dot{I}(x)} + Z_c} = \frac{Z(x) - Z_c}{Z(x) + Z_c}$$

với $Z(x)$ là trở kháng của mạch tại vị trí x



Dòng và áp điều hoà trên đường dây dài

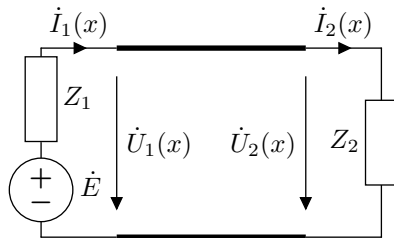
Hệ số phản xạ sóng

$$n(x) = \frac{Z(x) - Z_c}{Z(x) + Z_c}$$

- Hai vị trí đặc biệt:

1) Tại đầu đường dây: $Z(x) = Z(0) = Z_1 \rightarrow n_1 = \frac{Z_1 - Z_c}{Z_1 + Z_c}$

2) Tại cuối đường dây: $Z(x) = Z(l) = Z_2 \rightarrow n_2 = \frac{Z_2 - Z_c}{Z_2 + Z_c}$



- $n_1 = \frac{\dot{A}_2}{\dot{A}_2} e^{2\gamma_0} = \frac{\dot{A}_2}{\dot{A}_2}$
- $\Rightarrow n_2 = n_1 e^{2\gamma l}$

Hệ số phản xạ sóng: trường hợp hoà hợp tải

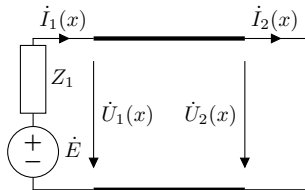
- $Z_2 = Z_c \Rightarrow n_2 = 0 \Rightarrow \dot{U}_2^- = 0 \Rightarrow$ Không phản xạ



Dòng và áp điều hoà trên đường dây dài

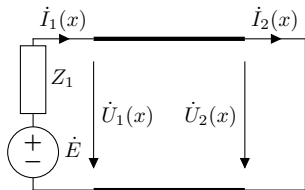
Hệ số phản xạ sóng: trường hợp hở mạch

- $Z_2 = \infty \Rightarrow n_2 = 1$
- $\Rightarrow \dot{U}_2^- = \dot{U}_2^+$
- $\rightarrow$ Phản xạ toàn phần



Hệ số phản xạ sóng: trường hợp ngắn mạch

- $Z_2 = 0 \Rightarrow n_2 = -1$
- $\Rightarrow \dot{U}_2^- = -\dot{U}_2^+$
- $\rightarrow$ Phản xạ toàn phần đổi dấu





Dòng và áp điều hoà trên đường dây dài

Tóm lược các thông số đường dây dài

- Cho các thông số đặc trưng R, L, G, C của đường dây và tần số ω
- Tổng trở dọc đường dây: $Z = R + j\omega L$
- Tổng dẫn ngang đường dây: $Y = G + j\omega C$
- Hệ số truyền sóng: $\gamma = \sqrt{ZY} = \alpha + j\beta$
- Vận tốc truyền sóng: $v = \frac{\omega}{\beta}$
- Tổng trở sóng: $Z_c = \frac{Z}{\gamma} = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$
- Hệ số phản xạ: $n(x) = \frac{\dot{U}^-(x)}{\dot{U}^+(x)} = \frac{\dot{I}^-(x)}{\dot{I}^+(x)} = \frac{Z(x) - Z_c}{Z(x) + Z_c}$



Dòng và áp điều hoà trên đường dây dài

Ví dụ 3.1:

Cho đường dây dài đều có $R = 1\Omega/\text{km}$; $L = 4\text{ mH}/\text{km}$; $G = 0\text{ S}/\text{km}$; $C = 3,19\text{ nF}/\text{km}$. Biết điện áp cuối đường dây $\dot{U}_2 = 220/\underline{0^\circ}\text{ kV}$ và tải $Z_2 = 50\sqrt{3} - j50\Omega$. Tính điện áp tới và phản xạ ở cuối đường dây.



Hệ phương trình hyperbolic của đường dây dài

Ý tưởng của phương pháp

- Các phương trình sóng phức tạp và không thuận tiện để giải mạch đường dây dài xác lập
- Nhận xét: các nghiệm có chứa $e^{\gamma x}$ và $e^{-\gamma x}$

⇒ Dùng các hàm hyperbolic có thể sẽ thuận tiện hơn

Các hàm hyperbolic dùng cho đường dây dài

- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

- $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$

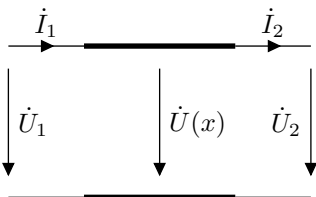
- $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$



Hệ phương trình hyperbolic của đường dây dài

- Tại một vị trí x trên đường dây dài
- Các nghiệm sóng thuận và ngược có thể được viết lại dưới dạng:

$$\dot{U}(x) = \dot{M} \cdot \cosh(\gamma x) + \dot{N} \cdot \sinh(\gamma x)$$



- Từ hệ phương trình đặc trưng của đường dây dài:

$$\begin{cases} \frac{d\dot{U}(x)}{dx} = -Z \cdot \dot{I}(x) \\ \frac{d\dot{I}(x)}{dx} = -Y \cdot \dot{U}(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d\dot{U}(x)}{dx} = \gamma \dot{M} \cdot \sinh(\gamma x) + \gamma \dot{N} \cdot \cosh(\gamma x) = -Z \cdot \dot{I}(x)$$

$$\Rightarrow \dot{I}(x) = -\frac{\dot{M}}{Z_c} \sinh(\gamma x) - \frac{\dot{N}}{Z_c} \cosh(\gamma x)$$



Hệ phương trình hyperbolic của đường dây dài

- Tại một vị trí x trên đường dây dài
- Các nghiệm sóng thuận và ngược có thể được viết lại dưới dạng:

$$\dot{U}(x) = \dot{M} \cdot \cosh(\gamma x) + \dot{N} \cdot \sinh(\gamma x)$$

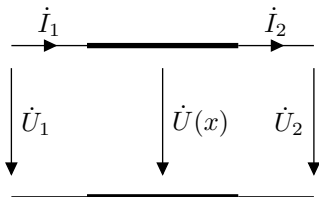
$$\dot{I}(x) = -\frac{\dot{M}}{Z_c} \sinh(\gamma x) - \frac{\dot{N}}{Z_c} \cosh(\gamma x)$$

- Các hệ số phức $\dot{M}$ và $\dot{N}$ xác định từ điều kiện biên:

- Tại đầu đường dây: $x = 0$

$$\rightarrow \dot{U}(0) = \dot{U}_1 = \dot{M} \cdot \cosh(0) + \dot{N} \cdot \sinh(0) = \dot{M} \Rightarrow \dot{M} = \dot{U}_1$$

$$\rightarrow \dot{I}(0) = \dot{I}_1 = -\frac{\dot{M}}{Z_c} \sinh(0) - \frac{\dot{N}}{Z_c} \cosh(0) \Rightarrow \dot{N} = -Z_c \cdot \dot{I}_1$$





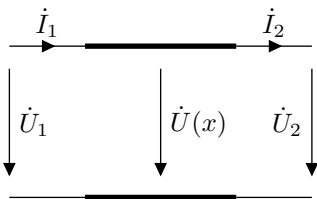
Hệ phương trình hyperbolic của đường dây dài

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_1 \cdot \cosh(\gamma x) - Z_c \cdot \dot{I}_1 \cdot \sinh(\gamma x)$$

$$\dot{I}(x) = -\frac{\dot{U}_1}{Z_c} \cdot \sinh(\gamma x) + \dot{I}_1 \cdot \cosh(\gamma x)$$

- Tại cuối đường dây:

$$x = l; \dot{U}(l) = \dot{U}_2; \dot{I}(l) = \dot{I}_2$$



- Hệ phương trình dạng truyền đạt ngược (ma trận **B**):

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \dot{U}_1 \cdot \cosh(\gamma l) - \dot{I}_1 \cdot Z_c \cdot \sinh(\gamma l) \\ \dot{I}_2 = -\dot{U}_1 \cdot \frac{1}{Z_c} \cdot \sinh(\gamma l) + \dot{I}_1 \cdot \cosh(\gamma l) \end{cases}$$

- Hệ phương trình dạng truyền đạt thuận (ma trận **A**):

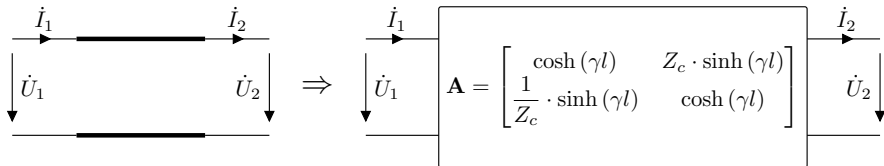
$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cdot \cosh(\gamma l) + \dot{I}_2 \cdot Z_c \cdot \sinh(\gamma l) \\ \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \cdot \frac{1}{Z_c} \cdot \sinh(\gamma l) + \dot{I}_2 \cdot \cosh(\gamma l) \end{cases}$$



Mạng hai cửa ma trận $\mathbf{A}$ tương đương

⇒ Mạch tuyến tính thông số rải → mạch thông số tập trung

- Mạng hai cửa truyền đạt thuận ma trận $\mathbf{A}$ tương đương:



- Chú ý: $\gamma = \alpha + j\beta$ là số phức

⇒ Cách tính các hàm hyperbolic phức:

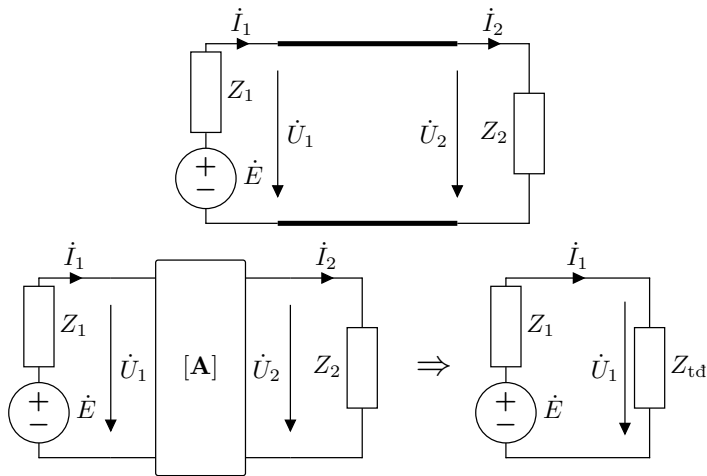
$$\begin{aligned} \cosh(\alpha + j\beta) &= \frac{e^{(\alpha + j\beta)} + e^{-(\alpha + j\beta)}}{2} = \frac{e^{\alpha}(\cos \beta + j \sin \beta) + e^{-\alpha}(\cos \beta - j \sin \beta)}{2} \\ &= \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \cos \beta + j \sin \beta \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \\ &= \cosh \alpha \cos \beta + j \sinh \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

- Tương tự: $\sinh(\alpha + j\beta) = \sinh \alpha \cos \beta + j \cosh \alpha \sin \beta$



Mạng hai cửa ma trận **A** tương đương

Ví dụ 3.2:



Bài tập





Nội dung

3 Đường dây dài

- Khái niệm đường dây dài: mạch có thông số rải
 - Khái niệm
 - Mô hình, thông số, và quan hệ đặc trưng
- Đường dây dài ở chế độ xác lập: truyền công suất
 - Dòng và áp điều hoà trên đường dây dài
 - Hệ phương trình hyperbolic và mạng hai cửa tương đương
- Đường dây dài ở chế độ quá độ: truyền sóng
 - Đường dây dài không tiêu tán và sóng chạy trên dây
 - Mô hình Petersen cho sóng đánh tới cuối đường dây



Đường dây dài không tiêu tán

- Để đơn giản hoá việc tính toán quá độ trên đường dây dài, tạm xét đường dây không tiêu tán: $R = 0 \Omega/\text{km}$; $G = 0 \text{ S}/\text{km}$

$\Rightarrow$ Tổng trở dọc đường dây: $Z = j\omega L$

$\Rightarrow$ Tổng dẫn ngang đường dây: $Y = j\omega C$

$\Rightarrow$ Hệ số truyền sóng: $\gamma = \sqrt{Z \cdot Y} = j\omega\sqrt{LC} \Rightarrow \alpha = 0$; $\beta = \omega\sqrt{LC}$

$\Rightarrow$ Vận tốc truyền sóng: $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ không phụ thuộc tần số

$\Rightarrow$ Tổng trở sóng: $Z_c = \frac{Z}{\gamma} = \sqrt{\frac{L}{C}}$ là một số thực $\Rightarrow$ Thuần trở

$\Rightarrow$ Mạng hai cửa: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\beta l) & jZ_c \sin(\beta l) \\ j\frac{1}{Z_c} \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{bmatrix}$ vì $\alpha = 0$



Sóng chạy trên đường dây dài không tiêu tán

- Đường dây dài không tiêu tán có công suất tiêu thụ bằng 0
- ⇒ Tín hiệu truyền trên đường dây dài không tiêu tán chỉ có góc pha thay đổi theo chiều dài dây còn biên độ không bị suy giảm
- ⇒ Tín hiệu ở điểm A truyền đến điểm B sẽ bị “trễ” một khoảng thời gian T bằng thời gian lan truyền sóng từ A đến B:

$$u_B(t) = u_A(t - T) \text{ với } T = \frac{l_{AB}}{v}$$

- Tạm xét hiện tượng quá độ với các sơ kiện bằng 0 (cho đơn giản)
 - Một sóng xuất hiện tại điểm A
 - Do đóng nguồn ở đầu dây
 - do sự cố ở một điểm trên dây
- ⇒ Sóng này chạy dọc đường dây không tiêu tán đến một nút B
 - Có thể là điểm cuối đường dây
 - Có thể là điểm nối các đường dây
 - Có thể là điểm nối tải trên đường dây



Sóng chạy trên đường dây dài không tiêu tán

- Khi sóng “đánh” tới nút B sẽ có “phản xạ” và “khúc xạ” tại B
 - Nếu B là điểm nối tải cuối đường dây, năng lượng khúc xạ sẽ tiêu tán hoặc được nạp vào tải
 - Nếu B là điểm nối với đường dây khác, sóng khúc xạ sẽ tiếp tục lan truyền trên đường dây này

⇒ Bài toán quá độ tại một nút:

- Biết sóng tới, cho thông số đường dây
- Tính sóng phản xạ và khúc xạ



Mô hình Petersen cho sóng đánh tới cuối đường dây

- Khi sóng đánh tới cuối đường dây:

$$u_{\text{tới}}(x,t) = u^+(x,t)$$

$$u_{\text{p.x}}(x,t) = u^-(x,t)$$

- Tổng trở sóng Z_c là số thực (thuần trở) $\Rightarrow$ có quan hệ của sóng dòng và áp trên miền thời gian:

$$u_{\text{tới}}(x,t) = Z_c \cdot i_{\text{tới}}(x,t)$$

$$u_{\text{p.x}}(x,t) = Z_c \cdot i_{\text{p.x}}(x,t)$$

- Tại cuối đường dây:

$$u_2(t) = u_{\text{tới}}(l,t) + u_{\text{p.x}}(l,t)$$

$$i_2(t) = i_{\text{tới}}(l,t) - i_{\text{p.x}}(l,t)$$

$\Rightarrow$ Nhân hai vế với Z_c rồi cộng phương trình:

$$u_2(t) + Z_c \cdot i_2(t) = 2u_{\text{tới}}(t)$$



Mô hình Petersen cho sóng đánh tới cuối đường dây

- Mô hình Petersen:

$$u_2(t) + Z_c \cdot i_2(t) = 2u_{t\text{ối}}(t)$$

- ⇒ Sóng điện áp $u_{t\text{ối}}(t)$ đánh tới cuối đường dây tương đương với việc đóng một nguồn áp $2u_{t\text{ối}}(t)$ và một tổng trở sóng Z_c vào tải (Hoàn toàn tương tự cho sóng dòng điện)
- ⇒ Đưa bài toán quá độ ở cuối đường dây dài đều không tiêu tán về bài toán quá độ của mạch tuyến tính thông số tập trung

