

Lý thuyết Trường điện từ

Học phần EE2031

Nguyễn Bảo Huy
huy.nguyenbao@hust.edu.vn

**Khoa Tự động hoá
Trường Điện - Điện tử
Đại học Bách Khoa Hà Nội**

Hà Nội, 2026



- Một bài kiểm tra giữa kỳ
- Một bài thi cuối kỳ
- Cấu trúc đề thi: 9 điểm làm bài và 1 điểm trình bày
- Được sử dụng tài liệu là 1 tờ giấy A4
- Cộng điểm quá trình (điểm quá trình tối đa: 10 điểm)
 - Giải bài tập trên lớp, thảo luận trên lớp: **cộng từ 0 đến 2 điểm** (làm bài sai, phát biểu sai không bị trừ điểm)
- Nội quy lớp học
 - Không điểm danh, không tính điểm chuyên cần
 - Ra vào tùy ý, yên lặng (không xin phép)
 - Không làm ồn, không gây mất tập trung
 - Mỗi lần nhắc trật tự: **trừ cả lớp 0.25 điểm** vào điểm quá trình
- Khi có yêu cầu từ giảng viên hoặc nhóm chuyên môn, sinh viên có nghĩa vụ làm rõ lại các nội dung đã thực hiện và giải trình các vấn đề trong bài thi

1. Làm bài tập
2. Làm bài tập
3. Nếu chưa làm bài tập xem lại hai điều trên
 - Nguồn bài tập
 - Các ví dụ trên lớp
 - Các bài tập về nhà
 - Các đề thi cũ
 - Các tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Bình Thành, Nguyễn Trần Quân, Lê Văn Bảng, *Cơ sở Kỹ thuật Điện – Tập I – Cơ sở Lý thuyết Trường điện từ*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1970.
2. Feynman, Leighton, Sands, *The Feynman Lectures on Physics – Volume II – Mainly Electromagnetism and Matter*, Basic Books, 2021.
[Online] <https://www.feynmanlectures.caltech.edu/>
3. N. N. Rao, *Basic Electromagnetics with Applications*, Prentice-Hall, 1972.
4. W. H. Hayt and J. A. Buck, *Engineering Electromagnetics*, 9th ed., McGraw-Hill, 2018.
5. E. M. Purcell and D. J. Morin, *Electricity and Magnetism*, McGraw-Hill, 2013.

Nhiều nội dung, hình vẽ, và cách diễn đạt trong bài giảng này được lấy từ các tài liệu tham khảo nêu trên. Để thuận tiện trong trình bày, trong bài giảng sẽ không có các trích dẫn cụ thể.

- Mở đầu
- ① Giải tích vector
- ② Điện trường tĩnh
- ③ Điện trường dừng
- ④ Từ trường tĩnh
- ⑤ Trường điện từ biến thiên

Nội dung môn học

● Mở đầu

- 1 Giải tích vector
- 2 Điện trường tĩnh
- 3 Điện trường dòng
- 4 Từ trường tĩnh
- 5 Trường điện từ biến thiên

Nội dung chương

● Mở đầu



Hiện tượng điện từ và khái niệm trường

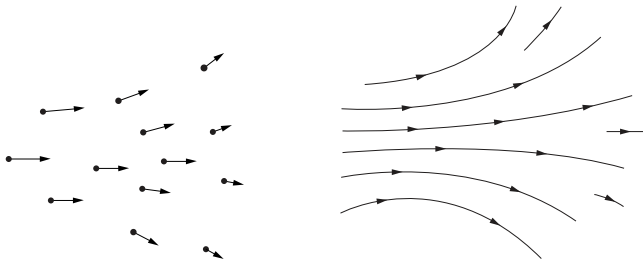
- Qua thực nghiệm, ta biết trong tự nhiên có các **điện tích***
- Các điện tích, khi **đứng yên hoặc chuyển động**, *tác dụng lực* lên nhau *không qua tiếp xúc trực tiếp* → tương tác lực qua **trường**
- **Trường** là một đại lượng vật lý mà *mỗi điểm* trong không gian và thời gian *có một giá trị xác định*
 - Nếu giá trị đó là đại lượng vô hướng, ta có *trường vô hướng*
 - Nếu giá trị đó là đại lượng vector, ta có **trường vector**
- Trong môn học này, ta xét **trường điện từ cổ điển** theo lý thuyết của **Maxwell** với các kích thước và khối lượng lớn hơn phạm vi của cơ học lượng tử và nhỏ hơn phạm vi của thuyết tương đối.
- Trường điện từ **tác dụng lực** lên điện tích → là **trường vector**

⇒ Công cụ toán học: **giải tích vector**

*Phần Mở đầu chỉ trình bày khái quát một số khái niệm để sinh viên bước đầu có hình dung về môn học. Những chương sau sẽ trình bày các nội dung một cách cụ thể và chính xác.

Biểu diễn trường vector

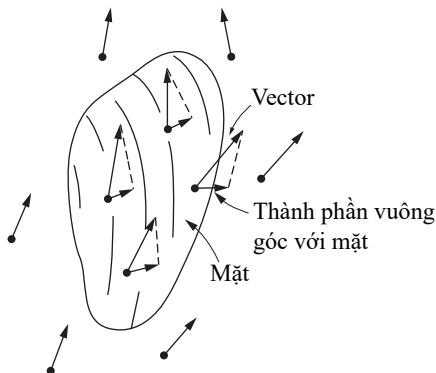
- Mỗi điểm của trường vector có một giá trị vector
- Do trường điện từ tồn tại ở mọi điểm trong không gian, ta có thể nối các điểm theo hướng **tiếp tuyến với các vector** để biểu diễn thành các **đường sức** của trường
- **Cường độ** của trường có thể được biểu diễn bằng **số lượng đường sức qua một đơn vị diện tích** (mật độ đường sức dày hay thưa)
- Vì mỗi điểm chỉ có một vector nên **các đường sức không giao nhau**



Các đặc tính của trường vector: Thông lượng

- Ta có thể nhìn trường vector như “dòng chảy” của các đường sức
- Với một **mặt bất kỳ**, ta muốn biết trường vector “chảy qua” mặt đó như thế nào → khái niệm **thông lượng (flux)**

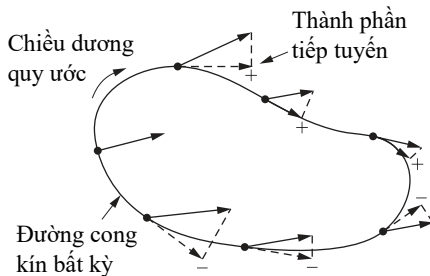
$$\text{Thông lượng} = \left(\begin{array}{c} \text{Thành phần} \\ \text{vuông góc} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \text{Diện tích} \\ \text{của mặt} \end{array} \right)$$



Các đặc tính của trường vector: Lưu số

- Ta có thể nhìn trường vector như “dòng chảy” của các đường sức
- Với một **đường khép kín bất kỳ**, ta muốn biết trường vector “chảy quanh” đường đó như thế nào → khái niệm **lưu số (circulation)**

$$\text{Lưu số} = \left(\begin{array}{c} \text{Thành phần} \\ \text{tiếp tuyến} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \text{Độ dài} \\ \text{của đường} \end{array} \right)$$



Các quy luật của trường điện từ

- Trường điện từ có 2 mặt: điện trường **E** và từ trường **B**
- Hệ 4 phương trình Maxwell-Heaviside mô tả đầy đủ các quy luật của trường điện từ biến thiên (trong chân không)

$$\left(\begin{array}{l} \text{Thông lượng của } \mathbf{E} \\ \text{qua một mặt kín } S \end{array} \right) = \frac{\left(\begin{array}{l} \text{Tổng điện tích} \\ \text{trong mặt kín} \end{array} \right)}{\text{Hằng số } \epsilon_0}$$

⇒ Điện tích sinh ra điện trường

$$\left(\begin{array}{l} \text{Lưu số của } \mathbf{E} \\ \text{theo một đường} \\ \text{khép kín } C \end{array} \right) = - \frac{d}{dt} \left(\begin{array}{l} \text{Thông lượng của } \mathbf{B} \\ \text{qua mặt } S \\ \text{có đường biên } C \end{array} \right)$$

⇒ Từ trường biến thiên sinh ra điện trường xoáy

Các quy luật của trường điện từ

$$\left(\begin{array}{l} \text{Thông lượng của } \mathbf{B} \\ \text{qua một mặt kín } S \end{array} \right) = 0$$

⇒ Không tồn tại đơn cực từ (“từ tích”) trong tự nhiên

$$\left(\begin{array}{l} \text{Lưu số của } \mathbf{B} \\ \text{theo đường} \\ \text{khép kín } C \end{array} \right) = \epsilon_0 \cdot \mu_0 \frac{d}{dt} \left(\begin{array}{l} \text{Thông lượng của } \mathbf{E} \\ \text{qua mặt } S \\ \text{có đường biên } C \end{array} \right) + \mu_0 \left(\begin{array}{l} \text{Thông lượng của} \\ \text{mật độ dòng điện} \\ \text{qua mặt } S \end{array} \right)$$

⇒ Điện trường biến thiên (dòng điện dịch) và dòng điện dẫn sinh ra từ trường xoáy



Các quy luật của trường điện từ

- Nếu trường không biến thiên theo thời gian $\frac{d}{dt}(\cdot) = 0$
 $\rightarrow$ trường tĩnh
- Điện trường tĩnh và từ trường tĩnh độc lập với nhau

$$\left(\begin{array}{l} \text{Thông lượng của } \mathbf{E} \\ \text{qua một mặt kín } S \end{array} \right) = \frac{\left(\begin{array}{l} \text{Tổng điện tích} \\ \text{trong mặt kín} \end{array} \right)}{\epsilon_0}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Lưu số của } \mathbf{E} \\ \text{theo một đường} \\ \text{khép kín } C \end{array} \right) = 0$$

$\Rightarrow$ Điện trường tĩnh do điện tích đứng yên sinh ra

$\Rightarrow$ Điện trường tĩnh chỉ “tản” chứ không “xoáy”



Các quy luật của trường điện từ

- Nếu trường không biến thiên theo thời gian $\frac{d}{dt}(\cdot) = 0$
→ trường tĩnh
- Điện trường tĩnh và từ trường tĩnh độc lập với nhau

$$\left(\begin{array}{l} \text{Thông lượng của } \mathbf{B} \\ \text{qua một mặt kín } S \end{array} \right) = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Lưu số của } \mathbf{B} \\ \text{theo đường} \\ \text{khép kín } C \end{array} \right) = \mu_0 \left(\begin{array}{l} \text{Thông lượng của} \\ \text{mật độ dòng điện} \\ \text{qua mặt } S \end{array} \right)$$

- ⇒ Từ trường tĩnh do dòng điện không đổi (dòng một chiều) sinh ra
(Nam châm có các dòng điện phân tử tạo thành “lưỡng cực từ”)
- ⇒ Từ trường tĩnh chỉ “xoáy” chứ không “tản”
- Trong vật dẫn có dòng điện một chiều: Điện trường dừng

Nội dung môn học

- Mở đầu
- 1** Giải tích vector
- 2 Điện trường tĩnh
- 3 Điện trường dừng
- 4 Từ trường tĩnh
- 5 Trường điện từ biến thiên



Nội dung chương

1 Giải tích vector

- Một số khái niệm cơ bản
- Các phép tính vi phân
- Các phép tính tích phân
- Những định lý quan hệ giữa các phép tính



Nội dung chương

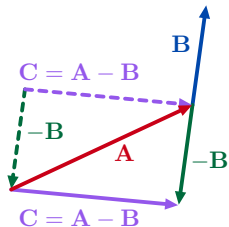
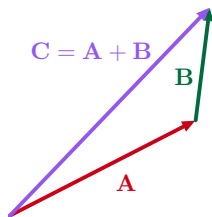
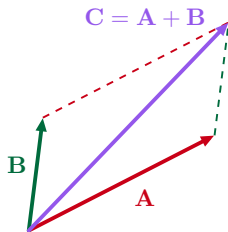
1 Giải tích vector

- Một số khái niệm cơ bản
- Các phép tính vi phân
- Các phép tính tích phân
- Những định lý quan hệ giữa các phép tính



Khái niệm vector, phép toán cộng và trừ vector

- Đại lượng *vô hướng* là đại lượng *chỉ có độ lớn*. Ví dụ: nhiệt độ.
- Đại lượng **vector** là đại lượng **có hướng và độ lớn**. Ví dụ: vector vận tốc có hướng của chuyển động và độ lớn của vận tốc (tốc độ).
- Ký hiệu đại lượng vô hướng: a (in nghiêng)
- Ký hiệu đại lượng vector: $\mathbf{a}$ (in đậm). Viết tay: $\vec{a}$
- Độ lớn (modulus) của vector $\mathbf{A}$ ký hiệu là $|\mathbf{A}|$ có giá trị là A
- Cộng: $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ (hình bình hành; hoặc dịch gốc $\mathbf{B}$ đến đầu $\mathbf{A}$)
- Trừ: $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = -\mathbf{B} + \mathbf{A}$





Phép toán nhân vector

- Nhân vector với số vô hướng: $m\mathbf{A}$. Độ lớn $|m\mathbf{A}| = mA$
- **Vector đơn vị**: lấy vector $\mathbf{A}$ chia cho độ lớn $|\mathbf{A}|$ ta được vector có độ lớn bằng 1 (đơn vị) và cùng hướng với $\mathbf{A}$:

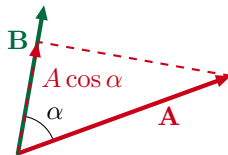
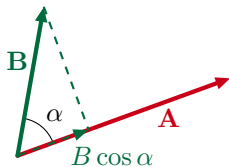
$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{A}$$

Vector đơn vị rất quan trọng trong Lý thuyết Trường điện từ

- **Nhân vô hướng** hai vector (*tích vô hướng* hoặc *tích “chấm”*):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\alpha = AB\cos\alpha = BA\cos\alpha = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

với α là góc giữa $\mathbf{A}$ và $\mathbf{B}$. Tích vô hướng là đại lượng vô hướng.



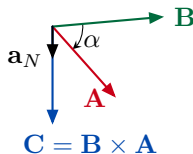
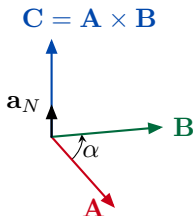


Phép toán nhân vector

- **Nhân có hướng** hai vector (*tích có hướng* hoặc *tích “chéo”*):

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\alpha \mathbf{a}_N = AB\sin\alpha \mathbf{a}_N = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

với α là góc giữa $\mathbf{A}$ và $\mathbf{B}$; $\mathbf{a}_N$ là vector đơn vị với $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, và $\mathbf{a}_N$ theo thứ tự tạo thành *tam diện thuận* (quy tắc bàn tay phải).
Tích có hướng là một vector.





Ba hệ tọa độ cơ bản

- Để *mô tả nguyên lý*, ta chỉ cần các ký hiệu vector $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, v.v.
 - Để *tính toán*, ta cần *toa độ* của chúng $\rightarrow$ **hệ tọa độ**
 - Không gian 3 chiều của vật lý cổ điển $\rightarrow$ 3 tọa độ cho mỗi vector
- $\Rightarrow$ Một hệ tọa độ **gồm 3 mặt trục giao đôi một** (từng cặp) với nhau

Ba hệ tọa độ cơ bản

- Hệ tọa độ Decartes (Cartesian): 3 mặt phẳng
- Hệ tọa độ trụ: 1 mặt trụ, 1 mặt phẳng, và 1 nửa mặt phẳng
- Hệ tọa độ cầu: 1 mặt cầu, 1 mặt nón, và 1 mặt phẳng

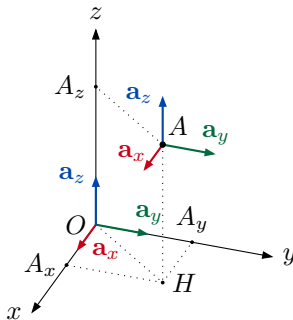
Với mỗi hệ tọa độ cần nắm được cách xác định:

- | | |
|---|--------------------------------------|
| • 3 thành phần tọa độ | • Vector đường nguyên tố |
| • 3 vector đơn vị ứng với 3 thành phần tọa độ | • Vector mặt nguyên tố |
| | • Thể tích khối nguyên tố (vô hướng) |



Hệ toạ độ Decartes

- Có 3 mặt trục giao đôi một là 3 mặt phẳng
- Các trục giao nhau tại gốc toạ độ
- Xét điểm A bất kỳ.
- Các mặt qua A cắt các trục tại 3 toạ độ A_x, A_y, A_z
- Các vector đơn vị vuông góc với các mặt trục giao: $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$
- Miền xác định của các thành phần toạ độ:
 - $x \in (-\infty, \infty)$
 - $y \in (-\infty, \infty)$
 - $z \in (-\infty, \infty)$

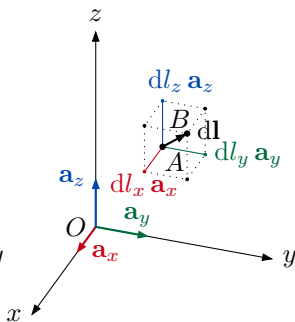
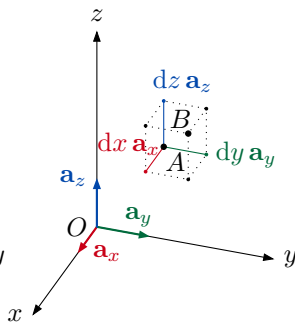
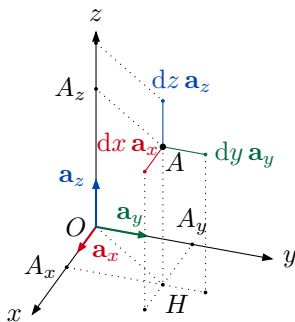




Hệ tọa độ Decartes: vector đường nguyên tố

- Tại A , xét các dịch chuyển vô cùng nhỏ dx , dy , dz theo các trục
- $\Rightarrow$ Được điểm B là một dịch chuyển vô cùng nhỏ so với điểm A
- $\Rightarrow$ **Vector đường nguyên tố**

$$dl = dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z = dl_x \mathbf{a}_x + dl_y \mathbf{a}_y + dl_z \mathbf{a}_z$$

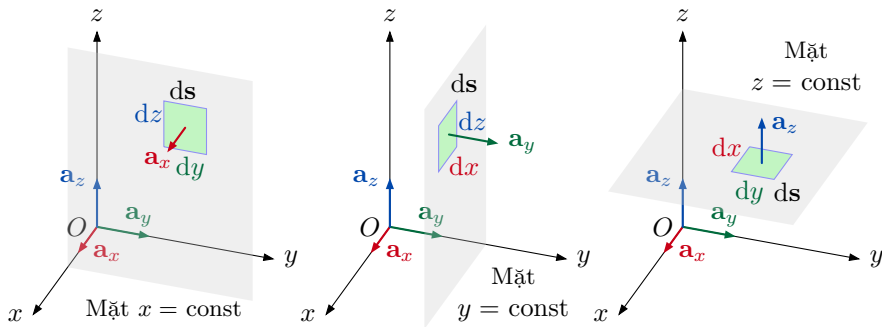




Hệ tọa độ Decartes: vector mặt nguyên tố

- Xét các dịch chuyển vô cùng nhỏ dx , dy , dz theo các trục
- $\Rightarrow$ Được các diện tích vô cùng nhỏ $dx dy$, $dy dz$, $dz dx$
- $\Rightarrow$ Các **vector mặt nguyên tố** trên các mặt tương ứng

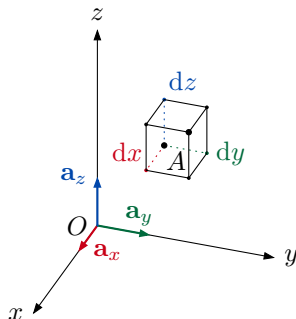
$$ds_x = \pm dy dz \mathbf{a}_x; ds_y = \pm dz dx \mathbf{a}_y; ds_z = \pm dx dy \mathbf{a}_z$$





Hệ toạ độ Decartes: thể tích khối nguyên tố

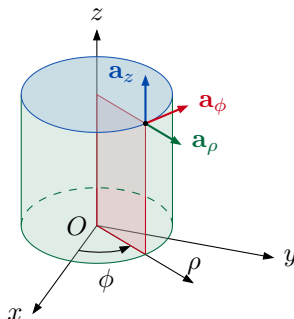
- Xét các dịch chuyển vô cùng nhỏ dx , dy , dz theo các trục
- ⇒ Được thể tích khối vô cùng nhỏ $dv = dx dy dz$
- Thể tích khối nguyên tố là một số vô hướng





Hệ tọa độ trụ

- Có 3 mặt trục giao đôi một là 1 mặt trụ và 2 mặt phẳng
- Xét điểm A bất kỳ. Dịch các mặt trục giao tới A
- Các mặt qua A cắt các trục tại 3 tọa độ A_ρ , A_ϕ , A_z
- Các vector đơn vị vuông góc với các mặt trục giao: $\mathbf{a}_\rho$, $\mathbf{a}_\phi$, $\mathbf{a}_z$
- Miền xác định của các thành phần tọa độ:
 - $\rho \in (0, \infty)$
 - $\phi \in (0, 2\pi)$
 - $z \in (-\infty, \infty)$

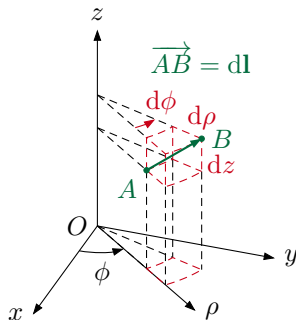




Hệ tọa độ trụ: vector đường nguyên tố

- Tại A , xét các dịch chuyển vô cùng nhỏ $d\rho$, $d\phi$, dz theo các trục
- $\Rightarrow$ Được điểm B là một dịch chuyển vô cùng nhỏ so với điểm A
- $\Rightarrow$ **Vector đường nguyên tố**

$$d\mathbf{l} = d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z$$

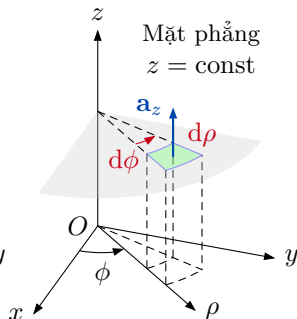
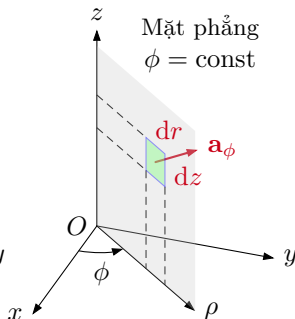
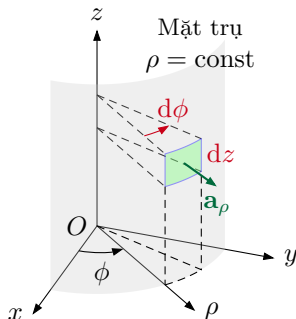




Hệ tọa độ trụ: vector mặt nguyên tố

- Xét các dịch chuyển vô cùng nhỏ $d\rho$, $d\phi$, dz theo các trục
- $\Rightarrow$ Được các diện tích vô cùng nhỏ $\rho d\phi dz$, $d\rho dz$, $\rho d\rho d\phi$
- $\Rightarrow$ Các **vector mặt nguyên tố** trên các mặt tương ứng

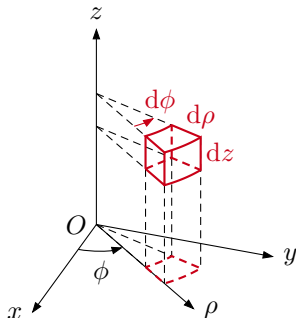
$$ds_r = \pm \rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho; ds_\phi = \pm d\rho dz \mathbf{a}_\phi; ds_z = \pm \rho d\rho d\phi \mathbf{a}_z$$





Hệ tọa độ trụ: thể tích khối nguyên tố

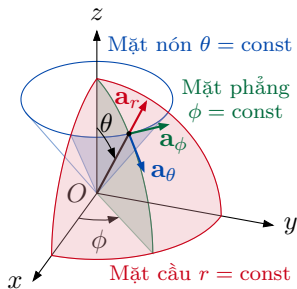
- Xét các dịch chuyển vô cùng nhỏ $d\rho$, $d\phi$, dz theo các trục
- ⇒ Được thể tích khối vô cùng nhỏ $dv = \rho d\rho d\phi dz$
- Thể tích khối nguyên tố là một số vô hướng





Hệ tọa độ cầu

- Có 3 mặt trục giao đôi một là 1 mặt trụ, 1 mặt nón, 1 mặt phẳng
- Xét điểm A bất kỳ. Dịch các mặt trục giao tới A
- Các mặt qua A cắt các trục tại 3 tọa độ A_r , A_θ , A_ϕ
- Các vector đơn vị vuông góc với các mặt trục giao: $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\theta$, $\mathbf{a}_\phi$
- Miền xác định của các thành phần tọa độ:
 - $r \in (0, \infty)$
 - $\theta \in (0, \pi)$
 - $\phi \in (0, 2\pi)$





Ba hệ tọa độ cơ bản: bảng tổng hợp

	Decartes	Trụ	Cầu
Các mặt trục giao	3 mặt phẳng	1 mặt trụ, 2 mặt phẳng	1 mặt trụ, 1 mặt nón, 1 mặt phẳng
Hệ tọa độ	x, y, z	ρ, ϕ, z	r, θ, ϕ
Vector đơn vị	$\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$	$\mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_\phi, \mathbf{a}_z$	$\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_\phi$
Miền giới hạn	$-\infty < x < \infty$ $-\infty < y < \infty$ $-\infty < z < \infty$	$0 \leq \rho < \infty$ $0 \leq \phi \leq 2\pi$ $-\infty < z < \infty$	$0 \leq r < \infty$ $0 \leq \theta \leq \pi$ $0 \leq \phi \leq 2\pi$
Vector đường nguyên tố	$dx \mathbf{a}_x, dy \mathbf{a}_y, dz \mathbf{a}_z$	$d\rho \mathbf{a}_\rho, \rho d\phi \mathbf{a}_\phi, dz \mathbf{a}_z$	$dr \mathbf{a}_r, r d\theta \mathbf{a}_\theta, r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi$
Vector mặt nguyên tố	$dy dz \mathbf{a}_x$ $dz dx \mathbf{a}_y$ $dx dy \mathbf{a}_z$	$\rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho$ $d\rho dz \mathbf{a}_\phi$ $\rho d\rho d\phi \mathbf{a}_z$	$r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r$ $r \sin \theta dr d\phi \mathbf{a}_\theta$ $r dr d\theta \mathbf{a}_\phi$
Thể tích khối nguyên tố	$dx dy dz$	$\rho d\rho d\phi dz$	$r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$



Ba hệ tọa độ cơ bản: mối quan hệ giữa các tọa độ

	Decartes x, y, z	Trụ ρ, ϕ, z	Cầu r, θ, ϕ
Decartes x, y, z		$x = \rho \cos \phi$ $y = \rho \sin \phi$ $z = z$	$x = r \sin \theta \cos \phi$ $y = r \sin \theta \sin \phi$ $z = r \cos \theta$
Trụ r, ϕ, z	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\phi = \arctan \frac{y}{x}$ $z = z$		$\rho = r \sin \theta$ $\phi = \phi$ $z = r \cos \theta$
Cầu r, θ, ϕ	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$ $\phi = \arctan \frac{y}{x}$	$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ $\theta = \arctan \frac{\rho}{z}$ $\phi = \phi$	



Nội dung chương

1 Giải tích vector

- Một số khái niệm cơ bản
- Các phép tính vi phân
- Các phép tính tích phân
- Những định lý quan hệ giữa các phép tính



Đạo hàm của hàm vô hướng

Đạo hàm của hàm một biến $f(x)$

- Với $f(x)$ là hàm (vô hướng) theo *biến độc lập* x
- Đạo hàm của $f(x)$ theo x là giới hạn sự biến thiên của $f(x)$ theo sự biến thiên vô cùng nhỏ (tiến đến 0) của x :

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Đạo hàm riêng của hàm nhiều biến $f(x, y, z)$

- Sự biến thiên của f theo mỗi biến gọi là *đạo hàm riêng* của f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

- Vi phân toàn phần của f là: $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$



Đạo hàm của hàm vector $\mathbf{A}(x, y, z)$

- Sự biến thiên của trường vector $\mathbf{A}(x, y, z)$ theo mỗi biến:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(x + \Delta x, y, z) - \mathbf{A}(x, y, z)}{\Delta x}$$

- Vi phân toàn phần của $\mathbf{A}$ tại điểm (x, y, z) là sự biến thiên vô cùng nhỏ của $\mathbf{A}$ từ điểm (x, y, z) đến điểm lân cận $(x + dx, y + dy, z + dz)$

$$d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} dz$$

- Nếu biểu diễn $\mathbf{A}$ theo các thành phần toạ độ

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$$

thì vi phân toàn phần của $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= dA_x \mathbf{a}_x + dA_y \mathbf{a}_y + dA_z \mathbf{a}_z \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} dx \mathbf{a}_x + \frac{\partial A_y}{\partial y} dy \mathbf{a}_y + \frac{\partial A_z}{\partial z} dz \mathbf{a}_z \end{aligned}$$



Gradient của hàm vô hướng $V(x, y, z)$

- Xét vi phân toàn phần của hàm $V(x, y, z)$ trong không gian

$$\begin{aligned}
 dV &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\
 &= \left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \cdot (dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z) \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \cdot V \cdot (dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z) \\
 &= \nabla V \cdot d\mathbf{l}
 \end{aligned}$$

với $d\mathbf{l}$ là vector đường nguyên tố, ∇ (nabla) là vector toán tử:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \text{ hoặc } \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

- Toán tử vector ∇ tác động lên V là *gradient* của hàm vô hướng $V(x, y, z)$

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$



Tính chất của gradient

- Gradient là một vector $\overrightarrow{\text{grad}} V$ có phương vuông góc với *mặt mức* (mặt đẳng cự) của trường vô hướng $V(x, y, z)$ chỉ chiều tăng của hàm V
- Hướng của vector $\overrightarrow{\text{grad}} V$ là *chiều tăng lớn nhất của V*
- Gọi $\mathbf{a}_n$ là vector pháp tuyến với mặt mức của V tại điểm (x, y, z)

$$\nabla V = |\nabla V| \cdot \mathbf{a}_n$$

- Xét một vector đường nguyên tố $d\mathbf{l}$ chỉ một biến thiên vô cùng nhỏ từ điểm $P(x, y, z)$ tới điểm $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$
- PQ có độ dài dl và vector dịch chuyển đơn vị $\mathbf{a}_l$
- Tổng quát: vector dịch chuyển $\mathbf{a}_l$ tạo với vector pháp tuyến $\mathbf{a}_n$ một góc α
- Vi phân của V theo hướng PQ là:

$$dV = \nabla V \cdot d\mathbf{l} = |\nabla V| \cdot \mathbf{a}_n \cdot d\mathbf{l} \cdot \mathbf{a}_l$$

- Đạo hàm (sự biến thiên) của V theo hướng PQ là:

$$\frac{dV}{dl} = |\nabla V| \cdot \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_l = |\nabla V| \cos \alpha$$



Mở rộng khái niệm vector toán tử ∇

- Toán tử $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ là một vector $\rightarrow$ có thể làm các phép toán:

- Nhân ∇ với một hàm vô hướng $V \rightarrow \nabla V = \overrightarrow{\text{grad}} V$
- Nhân vô hướng (tích chấm) ∇ với một hàm vector $\mathbf{A} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{A}$
- Nhân có hướng (tích chéo) ∇ với một hàm vector $\mathbf{A} \rightarrow \nabla \times \mathbf{A}$

$\rightarrow$ **Độ tản (divergence)** của một trường vector (div là một hàm vô hướng):

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$\rightarrow$ **Độ xoáy (rotor/curl)** của một trường vector ($\overrightarrow{\text{rot}}$ là một hàm vector)

$$\overrightarrow{\text{rot}} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

- Ta sẽ làm rõ thêm ý nghĩa của div và $\overrightarrow{\text{rot}}$ sau khi xét các khái niệm tích phân đường và tích phân mặt



Mở rộng toán tử ∇ cho các đạo hàm cấp 2

Một số tính chất của tích chấm và tích chéo

- Tích có hướng của hai vector cùng hướng bằng không

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

- Tích vô hướng của hai vector vuông góc bằng không

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$$

(vì $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$ vuông góc với cả $\mathbf{A}$ và $\mathbf{B}$)

Một số hệ quả khi đạo hàm cấp 2 triệt tiêu

- Gradient không xoáy

$$\nabla \times (\nabla V) = (\nabla \times \nabla) V = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} V) = 0$$

- Độ xoáy là một trường ống (không tản)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \mathbf{A}) = 0$$



Mở rộng toán tử ∇ cho các đạo hàm cấp 2

Từ các đạo hàm cấp 2 triệt tiêu

- Gradient không xoáy

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} V) = 0$$

- Độ xoáy là một trường ống (không tản)

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \mathbf{A}) = 0$$

Rút ra được 2 định lý

1. Nếu $\overrightarrow{\text{rot}} \mathbf{A} = 0$ thì tồn tại một hàm vô hướng f sao cho $\mathbf{A} = \overrightarrow{\text{grad}} f$
(Nếu trường vector $\mathbf{A}$ không xoáy thì $\mathbf{A}$ là gradient của một trường vô hướng f nào đó)
2. Nếu $\text{div} \mathbf{A} = 0$ thì tồn tại một trường vector $\mathbf{F}$ sao cho $\mathbf{A} = \overrightarrow{\text{rot}} \mathbf{F}$
(Nếu trường vector $\mathbf{A}$ là trường ống (không tản) thì $\mathbf{A}$ là độ xoáy của một trường vector $\mathbf{F}$ nào đó)



Mở rộng toán tử ∇ cho các đạo hàm cấp 2

Đạo hàm cấp 2 không triệt tiêu: hàm Laplacian

- Ta biết: tích vô hướng của 2 vector bằng nhau là bình phương độ lớn

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$$

→ Áp dụng cho vector toán tử ∇

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla V) &= (\nabla \cdot \nabla) V \\ &= \nabla^2 V\end{aligned}$$

với ∇^2 (lapl) là toán tử vô hướng Laplacian (có thể ký hiệu là Δ nhưng ta không dùng để tránh nhầm lẫn với ký hiệu sự biến thiên)

$$\nabla^2 = \text{lapl} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

→ Laplacian là *độ tản của gradient của trường vô hướng* V được tính bằng tổng đạo hàm riêng cấp 2 của V theo các hướng

$$\nabla^2 V = \text{lapl}(V) = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$



Tổng hợp các phép tính đạo hàm: gradient

- Toán tử vector: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$
- Gradient của trường vô hướng V là một vector: $\overrightarrow{\text{grad}} V = \nabla V$
- Hệ tọa độ Decartes:

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

- Hệ tọa độ trụ:

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

- Hệ tọa độ cầu:

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi$$



Tổng hợp các phép tính đạo hàm: độ tản

- Toán tử vector: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$
- Độ tản của trường vector $\mathbf{A}$ là một hàm vô hướng: $\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$
- Hệ tọa độ Decartes:

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Hệ tọa độ trụ:

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Hệ tọa độ cầu:

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$



Tổng hợp các phép tính đạo hàm: độ xoáy

- Toán tử vector: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$
- Độ xoáy của trường vector $\mathbf{A}$ là một hàm vector: $\vec{\text{rot}} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$
- Hệ tọa độ Decartes:
- Hệ tọa độ trụ:

$$\vec{\text{rot}} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\text{rot}} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{a}_\rho}{\rho} & \mathbf{a}_\phi & \frac{\mathbf{a}_z}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

- Hệ tọa độ cầu:

$$\vec{\text{rot}} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{a}_r}{r^2 \sin \theta} & \frac{\mathbf{a}_\theta}{r \sin \theta} & \frac{\mathbf{a}_\phi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix}$$



Nội dung chương

1 Giải tích vector

- Một số khái niệm cơ bản
- Các phép tính vi phân
- Các phép tính tích phân
- Những định lý quan hệ giữa các phép tính



Tích phân bất định và tích phân xác định

Tích phân bất định (nguyên hàm)

- Nguyên hàm là phép tính ngược lại của đạo hàm
- Nếu hàm số $F(x)$ có đạo hàm $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ thì $F(x)$ gọi là nguyên hàm của $f(x)$

$$\int f(x) dx = F(x) + C \text{ với } C = \text{const}$$

Tích phân xác định

- Hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$. Chia tùy ý $[a, b]$ thành các đoạn nhỏ sơ cấp $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{n-1} < x_n = b$.
- Mỗi đoạn sơ cấp $[x_{i-1}, x_i]$ chọn điểm ξ_i bất kỳ. Tích phân xác định:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\Delta x_{i-1} \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_{i-1}$$



Một số kỹ thuật tính tích phân

Định lý Newton–Leibniz (định lý cơ bản của giải tích)

- Nếu $F'(x) = f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Quy tắc đổi biến

- Trong một số trường hợp, phép đổi biến (đặt ẩn phụ) có thể làm cho bài toán tích phân dễ tính hơn
- Đặt $x = \varphi(t)$ với ánh xạ ngược $t = \varphi^{-1}(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

- Ví dụ: Tính $\int_0^a \sqrt{(a^2 - x^2)} dx$. Đặt $x = a \sin t \Rightarrow dx = a \cos t dt$;
 $t = \arcsin \frac{x}{a} \Rightarrow \int_0^a \sqrt{(a^2 - x^2)} dx = \int_0^{\pi/2} a \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot a \cdot \cos t dt = \frac{\pi a^2}{4}$



Một số kỹ thuật tính tích phân

Quy tắc tích phân từng phần

- Trong một số trường hợp, đổi hàm tính tích phân sẽ dễ tính hơn
- Nếu hàm $f(x)dx$ có thể phân tích thành $u(x)dv(x)$ thì

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

khi đó, có thể việc tính $\int v du$ sẽ dễ hơn tính $\int u dv$

- Ví dụ:

$$\int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 x de^x = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1$$



Tích phân bội

Tích phân hai lớp của hàm 2 biến $u = f(x,y)$ lấy theo mặt cong S

- Chia tùy ý miền S thành n diện tích sơ cấp ΔS_i
- Trong mỗi diện tích sơ cấp này chọn tùy ý một điểm $M_i(x_i, y_i)$

$$\iint_S f(x,y) dS = \lim_{\substack{\Delta S_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$$

Tích phân ba lớp của hàm 3 biến $u = f(x,y,z)$ lấy theo thể tích V

- Chia tùy ý miền V thành n thể tích sơ cấp ΔV_i
- Trong mỗi thể tích sơ cấp này chọn tùy ý một điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$

$$\iiint_V f(x,y,z) dV = \lim_{\substack{\Delta V_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$



Tích tích phân bội

- Việc tính tích phân bội được quy về *tính các tích phân đơn*:
 - Khai triển các diện tích nguyên tố dS và thể tích nguyên tố dV theo các biến của hệ tọa độ
 - Thứ tự tính tích phân: từ trong ra ngoài
 - Xác định cận lấy tích phân: từ ngoài vào trong
- Ví dụ: Tính $\iint_S xy^2 dS$ với S là miền giới hạn bởi đường $y = 2x$ và $y = x^2$

Hai đường $y = 2x$ và $y = x^2$ giao nhau tại $x = 0$ và $x = 2$

→ Tính tích phân theo y ở trong trước, theo x ở ngoài sau với $dS = dx dy$;

Lấy cận tính theo x từ 0 đến 2, theo y từ x^2 đến $2x$

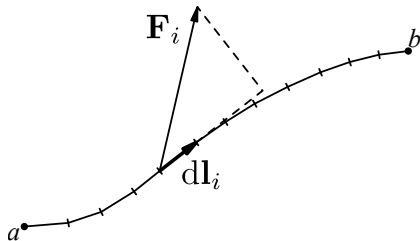
$$\begin{aligned} \Rightarrow \iint_S xy^2 dS &= \int_0^2 \left[\int_{x^2}^{2x} xy^2 dy \right] dx = \int_0^2 \frac{1}{3} xy^3 \Big|_{x^2}^{2x} dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{3} x(8x^3 - x^6) dx = 6,4 \end{aligned}$$

- Bài tập: Tính tích phân trên lấy cận theo thứ tự ngược lại.



Tích phân đường

- Xét một trường vector lực $\mathbf{F}$. Bài toán: tính công (năng lượng) của lực $\mathbf{F}$ dọc theo một đường cong nối từ a đến b .
- Ta biết tính công của một lực theo một đoạn thẳng là tích của hình chiếu của lực lên phương chuyển động với độ dài đoạn thẳng đó
- Chia đường cong ab thành các đoạn vô cùng nhỏ $dl_1, dl_2, dl_3, \dots$
- Tương ứng với các vector đường nguyên tố $d\mathbf{l}_1, d\mathbf{l}_2, d\mathbf{l}_3, \dots$
- Trường vector $\mathbf{F}$ tại mỗi đoạn tương ứng với vector $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$





Tích phân đường

- Công sinh ra trên đường cong ab là tổng công sinh ra trên mỗi đoạn

$$W = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 + \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{l}_3 + \dots = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{l}_i$$

- Giới hạn của tổng này khi độ dài mỗi đoạn $d\mathbf{l}_i \rightarrow 0$ và số đoạn $n \rightarrow \infty$ là *tích phân đường* của hàm vector $\mathbf{F}$ dọc theo đường cong ab

$$W = \lim_{\substack{d\mathbf{l}_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{l}_i = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

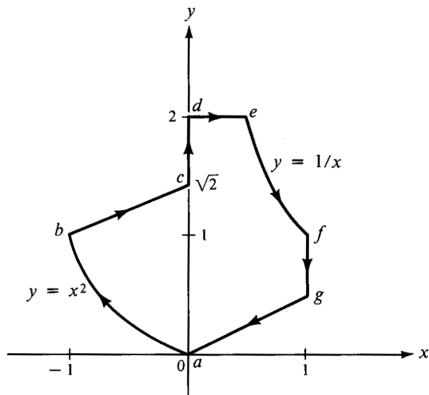
- Nếu lấy tích phân theo một *đường khép kín* C gọi là “*lưu số*” của $\mathbf{F}$ quanh C

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$



Tích tích phân đường

- Nguyên tắc chung: khai triển vector đường nguyên tố $d\mathbf{l}$ theo các toạ độ $\rightarrow$ tích vô hướng $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ trở thành hàm vô hướng $\rightarrow$ đưa về bài toán tính tích phân xác định
- Ví dụ: Tính công của lực $\mathbf{F} = y\mathbf{a}_x - x\mathbf{a}_y$ theo đường khép kín $abcdefga$



$$\begin{aligned}
 \bullet \quad W &= \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \\
 &= \oint (y\mathbf{a}_x - x\mathbf{a}_y) \cdot (dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y) \\
 &= \oint y dx - \oint x dy
 \end{aligned}$$

- Trên đoạn ab : $x \in [-1, 0]$;
 $y = x^2 \rightarrow dy = 2x dx$

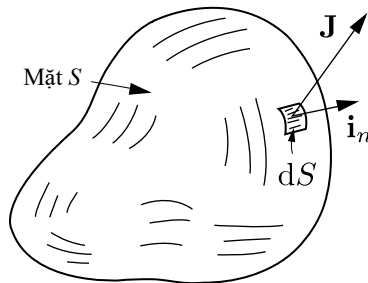
$$\begin{aligned}
 \rightarrow W_{ab} &= \int_{-1}^0 x^2 dx - \int_{-1}^0 x 2x dx \\
 &= -\frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

• ...



Tích phân mặt

- Xét một trường vector $\mathbf{J}$ là mật độ dòng chảy của một đại lượng vật lý nào đó (ví dụ dòng chảy các điện tích). Bài toán: tính tổng lượng dòng chảy (thông lượng) của đại lượng vật lý đó qua một mặt S .
 - Chia mặt S thành các mảnh diện tích vô cùng nhỏ $dS_1, dS_2, dS_3, \dots$
- Tương ứng với các vector mặt nguyên tố $d\mathbf{S}_1, d\mathbf{S}_2, d\mathbf{S}_3, \dots$
- Trường vector $\mathbf{J}$ tại mỗi mảnh tương ứng với các vector $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3, \dots$





Tích phân mặt

- Tổng lượng dòng chảy (thông lượng) qua mặt S là tổng thông lượng qua mỗi mảnh

$$I = \mathbf{J}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \mathbf{J}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 + \mathbf{J}_3 \cdot d\mathbf{S}_3 + \dots = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{S}_i$$

- Giới hạn của tổng này khi diện tích mỗi mảnh $dS_i \rightarrow 0$ và số mảnh $n \rightarrow \infty$ là *tích phân mặt* của hàm vector $\mathbf{J}$ trên mặt S

$$I = \lim_{\substack{dS_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{S}_i = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

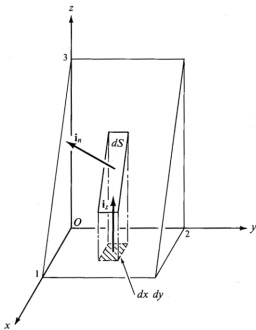
- Nếu lấy tích phân theo một *mặt kín* S

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$



Tích tích phân mặt

- Nguyên tắc chung: khai triển vector mặt nguyên tố $d\mathbf{S}$ theo các toạ độ $\rightarrow$ tích vô hướng $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ trở thành hàm vô hướng $\rightarrow$ đưa về bài toán tính tích phân hai lớp xác định
- Ví dụ: Tính thông lượng của trường $\mathbf{J} = 3x\mathbf{a}_x + (y - 3)\mathbf{a}_y + (2 + z)\mathbf{a}_z$ ra khỏi diện tích một hộp kín bao quanh bởi 5 mặt phẳng: $x = 0, y = 0, y = 2, z = 0, 3x + z = 3$



$$\begin{aligned} \bullet \quad I &= \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \oint (3x\mathbf{a}_x + (y - 3)\mathbf{a}_y + (2 + z)\mathbf{a}_z) \cdot (\pm dydz\mathbf{a}_x \pm dzdx\mathbf{a}_y \pm dxdy\mathbf{a}_z) \\ &= \oint [\pm 3x dydz \pm (y - 3) dzdx \pm (2 + z) dxdy] \end{aligned}$$

- Trên mặt $z = 0$: $x \in [0, 1]$; $y \in [0, 2]$; $dz = 0$;
 $d\mathbf{S} = -dxdy\mathbf{a}_z$ (do $\mathbf{a}_z$ hướng vào trong mặt kín)

$$\rightarrow I_{z=0} = \iint_{z=0} -2dxdy = \int_0^2 \int_0^1 -2dxdy = -4$$

- Trên mặt $3x + z = 3$ có $d\mathbf{S} = dS\mathbf{a}_n = \frac{dxdy}{\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_z} \mathbf{a}_n$
 $= \sqrt{3^2 + 1^2} dxdy \mathbf{a}_n$ với $\mathbf{a}_n = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \mathbf{a}_x + \frac{1}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \mathbf{a}_z$



Tích phân khối

- Xét một trường vô hướng ρ có giá trị xác định ứng với một đơn vị thể tích, ví dụ như khối lượng riêng của một vật thể. Bài toán: tính tổng khối lượng của vật thể có thể tích V và khối lượng riêng ρ .
 - Ta biết nếu khối lượng riêng không đổi thì khối lượng vật thể bằng khối lượng riêng nhân với thể tích của vật.
- Chia thể tích V thành các khối thể tích vô cùng nhỏ $dV_1, dV_2, dV_3, \dots$
- Trường vô hướng ρ tại mỗi khối ứng với các giá trị $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$
 - Khối lượng của vật thể là tổng khối lượng của các thể tích vô cùng nhỏ

$$m = \rho_1 \cdot dV_1 + \rho_2 \cdot dV_2 + \rho_3 \cdot dV_3 + \dots = \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot dV_i$$

- Giới hạn của tổng này khi thể tích mỗi khối $dV_i \rightarrow 0$ và số khối $n \rightarrow \infty$ là *tích phân khối* của hàm vô hướng ρ trên khối V

$$\lim_{\substack{dV_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot dV_i = \int_V \rho \cdot dV$$



Tích tích phân khối

- Nguyên tắc chung: khai triển thể tích khối nguyên tố dV theo các tọa độ
→ đưa về bài toán tính tích phân ba lớp xác định
- Ví dụ: Tính khối lượng của một vật thể hình cầu bán kính a có khối lượng riêng ρ

$$\rho(r, \theta, \phi) = \frac{\rho_0}{r}$$

trong đó ρ_0 là hằng số.

- Trong hệ tọa độ cầu, ta có

$$dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

→ Khối lượng của vật

$$\begin{aligned} m &= \int_V \rho(r, \theta, \phi) \cdot dV \\ &= \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\rho_0}{r} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= 2\pi \rho_0 a^2 \end{aligned}$$



Nội dung chương

1 Giải tích vector

- Một số khái niệm cơ bản
- Các phép tính vi phân
- Các phép tính tích phân
- Những định lý quan hệ giữa các phép tính



Định lý gradient

- Xét đường L bất kỳ nối a với b trong một trường vô hướng V

→ Bài toán: tính tích phân đường của $\overrightarrow{\text{grad}} V$ theo đường L

$$\int_L \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\mathbf{l} = \lim_{\substack{dl_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n |\overrightarrow{\text{grad}} V_t| \Delta l_i$$

trong đó $\overrightarrow{\text{grad}} V_t$ là hình chiếu của $\overrightarrow{\text{grad}} V$ lên phương của đoạn Δl_i

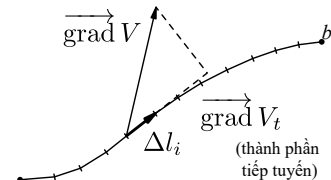
- Do gradient chỉ mức độ biến thiên của hàm số $\rightarrow |\overrightarrow{\text{grad}} V_t| \Delta l_i$ là sự biến thiên của hàm số từ điểm đầu đến điểm cuối đoạn Δl_i

→ $\sum_{i=1}^n |\overrightarrow{\text{grad}} V_t| \Delta l_i = V(b) - V(a)$

- Lập luận trên không phụ thuộc việc chọn đường L

→ Định lý gradient: với đường L bất kỳ

$$\int_L \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\mathbf{l} = V(b) - V(a)$$





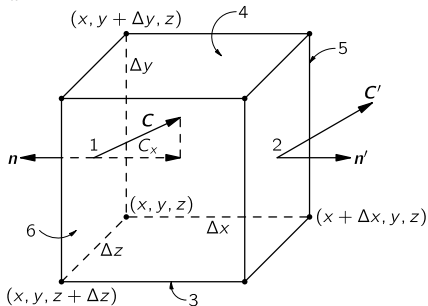
Độ tản & thông lượng: Định lý Ostrogradsky – Gauss

- Xét thông lượng của trường vector $\mathbf{C}$ qua mặt kín bao quanh một khối hộp rất nhỏ. Với các kích thước Δx , Δy , Δz đủ nhỏ, thông lượng của $\mathbf{C}$ qua mỗi mặt bằng thành phần pháp tuyến nhân với diện tích mặt đó.
- Thông lượng chảy ra khỏi mặt (1) $= -\mathbf{C}_x \Delta y \Delta z$
- Thông lượng chảy ra khỏi mặt (2) $= \mathbf{C}'_x \Delta y \Delta z$
- Trong đó, $\mathbf{C}$ biến thiên thành $\mathbf{C}'$ qua đoạn Δx

$$\mathbf{C}'_x = \mathbf{C}_x + \frac{\partial \mathbf{C}_x}{\partial x} \Delta x$$

→ Tổng thông lượng của $\mathbf{C}$ chảy ra khỏi mặt (1) và (2) là

$$-\mathbf{C}_x \Delta y \Delta z + \left(\mathbf{C}_x + \frac{\partial \mathbf{C}_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z$$





Độ tản & thông lượng: Định lý Ostrogradsky – Gauss

- Tổng thông lượng của $\mathbf{C}$ chảy ra khỏi mặt (1) và (2) là

$$-C_x \Delta y \Delta z + \left(C_x + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z = \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

- Hoàn toàn tương tự, với mặt (3) và (4) và mặt (5) và (6) là

$$\frac{\partial C_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \quad \text{và} \quad \frac{\partial C_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

- Tổng thông lượng của $\mathbf{C}$ chảy ra khỏi mặt kín S gồm 6 mặt của hình hộp:

$$\oint_S \mathbf{C} \cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \text{div } \mathbf{C} \cdot \Delta V$$

- Nếu mặt kín S bao quanh thể tích V bất kỳ → tính tổng thông lượng qua các thể tích khối nguyên tố → tích phân khối

$$\oint_S \mathbf{C} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{C} \, dV$$



Độ tản & thông lượng: Định lý Ostrogradsky – Gauss

Ý nghĩa của độ tản div

- Từ thông lượng của hàm vector ra khỏi mặt kín bao quanh một thể tích vô cùng nhỏ

$$\oint_S \mathbf{C} \cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \operatorname{div} \mathbf{C} \cdot \Delta V$$

→ Có thể dẫn ra công thức tính độ tản

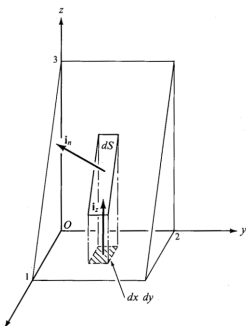
$$\operatorname{div} \mathbf{C} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{C} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

- Độ tản của một trường vector tại một điểm là thông lượng của trường toả ra qua một mặt kín khi mặt đó co về điểm đang xét → có thể hiểu độ tản là “mức độ tản ra” của trường vector tại một điểm
- Độ tản còn gọi là *đạo hàm khối vô hướng* của trường vector



Độ tản & thông lượng: Định lý Ostrogradsky – Gauss

- Về kỹ thuật tính toán, định lý Ostrogradsky – Gauss cho phép ta chuyển đổi qua lại giữa tích phân mặt và tích phân khối; trong đó có thể có phép tính dễ hơn
- Ví dụ: ứng dụng định lý Ostrogradsky – Gauss giải lại bài toán này
- Tính thông lượng của trường $\mathbf{J} = 3x\mathbf{a}_x + (y - 3)\mathbf{a}_y + (2 + z)\mathbf{a}_z$ ra khỏi diện tích một hộp kín bao quanh bởi 5 mặt phẳng: $x = 0$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $3x + z = 3$



$$\begin{aligned}
 \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} &= \int_V \text{div } \mathbf{J} dV \\
 &= \int_V \left(\frac{\partial(3x)}{\partial x} + \frac{\partial(y - 3)}{\partial y} + \frac{\partial(2 + z)}{\partial z} \right) dV \\
 &= 5 \int_V dV = 5 \cdot (\text{thể tích khối hộp}) = 15
 \end{aligned}$$



Độ xoáy & lưu số: Định lý Stoke

- Xét lưu số của trường vector $\mathbf{C}$ dọc theo đường khép kín hình vuông rất nhỏ. Không mất tính tổng quát, coi hình vuông vô cùng nhỏ này nằm trên mặt phẳng xy . Với các kích thước Δx và Δy đủ nhỏ, tích phân đường của $\mathbf{C}$ trên mỗi cạnh bằng hình chiếu của $\mathbf{C}$ nhân độ dài cạnh đó.

- Trên cạnh (1):

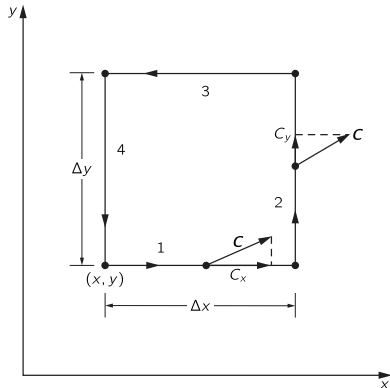
$$\int_{(1)} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{l} = C_x(1) \Delta x$$

- Trên cạnh (3):

$$\int_{(3)} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{l} = -C_x(3) \Delta x$$

- Trong đó, $C_x(1)$ biến thiên thành $C_x(3)$ qua đoạn Δy

$$C_x(3) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial y} \Delta y$$





Độ xoáy & lưu số: Định lý Stoke

→ Tích phân đường trên cạnh (1) và (3)

$$\int_{(1),(3)} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{l} = C_x(1) \Delta x - \left(C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x = -\frac{\partial C_x}{\partial y} \Delta x \Delta y$$

• Hoàn toàn tương tự với cạnh (2) và (4)

$$\int_{(2),(4)} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial C_y}{\partial x} \Delta x \Delta y$$

→ Lưu số của $\mathbf{C}$ quanh đường khép kín L hình vuông:

$$\oint_L \mathbf{C} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y = \vec{\text{rot}} \mathbf{C} \cdot \Delta \mathbf{S}$$

• Nếu đường khép kín L bao quanh một mặt S bất kỳ → tính tổng lưu số qua các mặt nguyên tố → tích phân mặt

$$\oint_L \mathbf{C} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \vec{\text{rot}} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{S}$$



Độ xoáy & lưu số: Định lý Stoke

Ý nghĩa của độ xoáy

→ Từ lưu số của trường vector quanh đường khép kín vô cùng nhỏ:

$$\oint_L \mathbf{C} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y = \vec{\text{rot}} \mathbf{C} \cdot \Delta \mathbf{S}$$

→ Có thể dẫn ra công thức tính độ xoáy

$$\vec{\text{rot}} \mathbf{C} = \lim_{\Delta \mathbf{S} \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{C} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta \mathbf{S}}$$

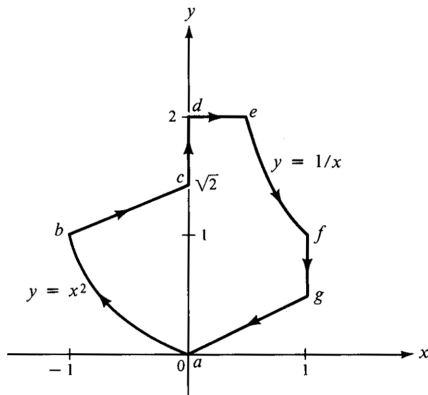
→ Độ xoáy của trường vector tại một điểm là lưu số của trường xoay quanh một vòng kín khi vòng đó co về điểm đang xét → có thể hiểu độ xoáy là “mức độ xoáy” của trường vector tại một điểm

→ Độ xoáy còn gọi là *đạo hàm khối vector* của trường vector



Độ xoáy & lưu số: Định lý Stoke

- Định lý Stoke cho phép chuyển đổi tích phân đường và tích phân mặt
- Ví dụ: ứng dụng định lý Stoke giải lại bài toán
- Tính công của lực $\mathbf{F} = y\mathbf{a}_x - x\mathbf{a}_y$ theo đường khép kín $abcdefga$



$$\begin{aligned}
 \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \int_S \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dS \\
 &= \int_S - \left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) dS \\
 &= 2 \int_S dS \\
 &= 2(\text{Diện tích mặt } S) = 4,634
 \end{aligned}$$

- Bài tập: tính diện tích mặt S

Nội dung môn học

- Mở đầu
- 1 Giải tích vector
- 2 Điện trường tĩnh**
- 3 Điện trường dừng
- 4 Từ trường tĩnh
- 5 Trường điện từ biến thiên



Nội dung chương

- 2 Điện trường tĩnh
 - Điện trường và vector cường độ điện trường
 - Một số hệ điện tích phân bố “liên tục”
 - Đường sức điện trường
 - Cảm ứng điện, điện thông, và định luật Gauss
 - Năng lượng, điện thế, và hiệu điện thế
 - Lưỡng cực điện
 - Điện môi và vật dẫn
 - Điện dung của hệ vật dẫn cô lập
 - Phương trình Poisson – Laplace



Nội dung chương

2 Điện trường tĩnh

- Điện trường và vector cường độ điện trường
- Một số hệ điện tích phân bố “liên tục”
- Đường sức điện trường
- Cảm ứng điện, điện thông, và định luật Gauss
- Năng lượng, điện thế, và hiệu điện thế
- Lưỡng cực điện
- Điện môi và vật dẫn
- Điện dung của hệ vật dẫn cô lập
- Phương trình Poisson – Laplace



Điện tích và lực điện

- Từ những năm 600 TCN, Thales đã quan sát thấy *lực điện* khi cọ xát vào lông thú có thể hút một số vật nhẹ, ví dụ lông chim
- Thế kỷ 18, Franklin xác định được *điện có 2 loại: dương và âm*
- Năm 1785, Coulomb làm thí nghiệm đo được lực điện này[†]
- Kết quả cho công thức (có dạng giống lực hấp dẫn của Newton) tính lực $\mathbf{F}$ giữa 2 chất điểm có điện tích Q_1 và Q_2 cách nhau một khoảng r

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \mathbf{a}_{12}$$

trong đó $k \approx 9.0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ là một hằng số.[‡]

[†]Tinh thần khoa học thực chứng của Galilei: Cái gì đo được thì đo, cái gì không đo được thì làm cho nó đo được

[‡]Hằng số này có giá trị rất lớn và do đó lực điện là một lực rất mạnh. Nếu 2 người đứng cách nhau 1 sải tay, mỗi người có số electron nhiều hơn số proton khoảng 1% thì lực tác động giữa 2 người đủ để nâng một vật có khối lượng bằng Trái đất.



Điện tích và lực điện

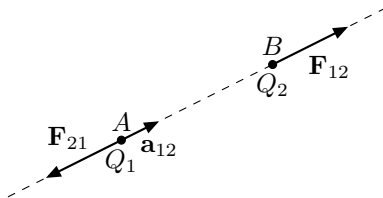
- Lực $\mathbf{F}$ giữa 2 chất điểm có điện tích Q_1 và Q_2 cách nhau một khoảng r

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \mathbf{a}_{12}$$

- Sau này, lý thuyết trường điện từ phát triển thống nhất 2 mặt điện và từ, hệ số k được triển khai theo một hằng số khác:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \mathbf{a}_{12}$$

với $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$ là *hằng số điện môi (trong chân không)*



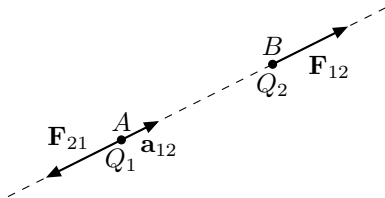


Điện trường và vector cường độ điện trường $\mathbf{E}$

- Q_1 và Q_2 tác dụng lực lên nhau *không qua tiếp xúc trực tiếp*
- Có một môi trường truyền lực → **điện trường**
- Nếu “bỏ” Q_2 đi thì tại điểm đó vẫn có một điện trường do Q_1 sinh ra
- Điện trường này có cường độ đo bằng lực điện sinh ra trên một đơn vị điện tích

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{F}_{12}}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \mathbf{a}_{12}$$

- Cường độ điện trường tỷ lệ với lực điện → là một đại lượng vector





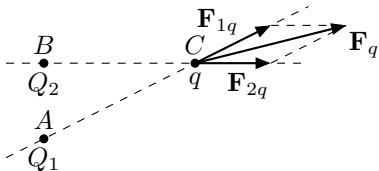
Điện trường và vector cường độ điện trường $\mathbf{E}$

- Lực có tính xếp chồng $\rightarrow$ **cường độ điện trường có tính xếp chồng**
- Xét hệ có điện tích Q_1 tại điểm A và điện tích Q_2 tại điểm B ; nếu tại điểm C có một “điện tích thử” q thì lực điện tác dụng lên nó là

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{F}_{1q} + \mathbf{F}_{2q}$$

$\rightarrow$ Cường độ điện trường tại C không phụ thuộc vào q

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(C) &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{d_{AC}^2} \mathbf{a}_{AC} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{d_{BC}^2} \mathbf{a}_{BC}\end{aligned}$$





Nội dung chương

2 Điện trường tĩnh

- Điện trường và vector cường độ điện trường
- Một số hệ điện tích phân bố “liên tục”
- Đường sức điện trường
- Cảm ứng điện, điện thông, và định luật Gauss
- Năng lượng, điện thế, và hiệu điện thế
- Lưỡng cực điện
- Điện môi và vật dẫn
- Điện dung của hệ vật dẫn cô lập
- Phương trình Poisson – Laplace



Một số hệ điện tích phân bố “liên tục”

- Trong tự nhiên, điện tích được phân bố rời rạc. Các hạt điện tích cơ bản có điện tích nguyên tố là $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
 - Trong thực tiễn kỹ thuật, ở phạm vi vật lý cổ điển, ta thường xét những hệ gồm rất nhiều hạt điện tích cơ bản phân bố trong không gian
- Coi là các hệ điện tích phân bố “liên tục”

Các dạng điện tích phân bố liên tục trong không gian

- Theo chiều dài: khi hệ có kích thước theo chiều dài lớn hơn rất nhiều so với các chiều còn lại (VD: dây, thanh, v.v.)
- Theo diện tích: khi hệ có kích thước theo diện tích mặt lớn hơn rất nhiều so với các chiều còn lại (VD: đĩa, tấm, v.v.)
- Theo thể tích: khi hệ có kích thước theo mọi chiều đều đáng kể

§ Ở cấp độ vi mô, người ta quan sát được các điện tích không nguyên như $\frac{1}{3}e$ nhưng ta không xét các hệ này.



Một số hệ điện tích phân bố “liên tục”

- Xét mật độ điện tích ρ là điện tích trên một đơn vị kích thước
- Với hệ phân bố theo chiều dài: mật độ điện dài ρ_l (C/m)
- Với hệ phân bố theo diện tích: mật độ điện mặt ρ_s (C/m²)
- Với hệ phân bố theo thể tích: mật độ điện khối ρ_v (C/m³)

→ Tính điện tích của hệ từ mật độ điện tích:

$$Q_L = \int_L \rho_l dl$$

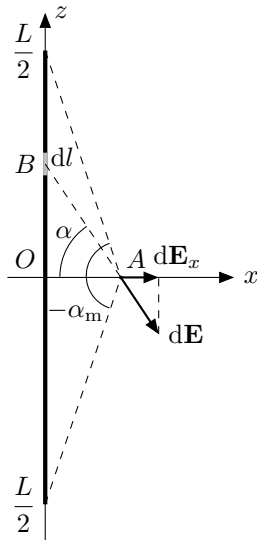
$$Q_S = \int_S \rho_s ds$$

$$Q_V = \int_V \rho_v dv$$



Điện trường quanh một dây dẫn thẳng tích điện đều

- Dây dẫn thẳng độ dài L có điện tích phân bố đều với mật độ điện dài ρ_l . Tính cường độ điện trường tại điểm A nằm trên mặt đối xứng của dây.
 - Chia đoạn dây L thành các đoạn vô cùng nhỏ dl → điện tích của các đoạn dl coi là các điện tích điểm dq → điện trường $\mathbf{E}$ tại điểm A là xấp chồng của các điện trường $d\mathbf{E}$ do các điện tích điểm dq sinh ra
 - Do A nằm trên mặt đối xứng của đoạn dây tích điện đều → điện trường của 2 nửa $L/2$ đối xứng nhau → vector cường độ điện trường tổng $\mathbf{E}$ nằm trên mặt đối xứng và cũng nằm trên mặt phẳng tạo bởi đoạn dây và điểm A
- Gắn đoạn dây L vào trục z đối xứng qua O → vector cường độ điện trường $\mathbf{E}$ nằm trên trục x (Gắn đoạn dây L vào trục y có được không?)





Điện trường quanh một dây dẫn thẳng tích điện đều

- Điện tích của đoạn dây có độ dài dl là $dq = \rho_l dl$

→ Cường độ điện trường do dq sinh ra có độ lớn:

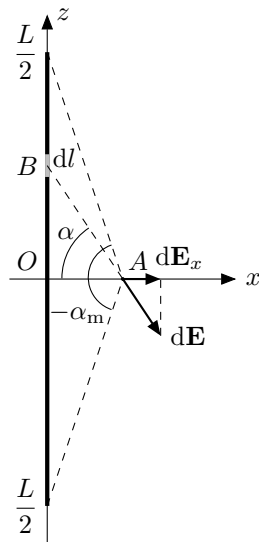
$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l dl}{d^2}$$

với d là khoảng cách từ A đến dl (độ dài AB)

→ Cường độ điện trường chiếu lên trục x :

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l dl}{d^2} \cos \alpha$$

- Khoảng cách d cũng phụ thuộc $\alpha \rightarrow$ quy về biến α với $d = a / \cos \alpha$ với a là khoảng cách từ điểm A đến đoạn dây L (toạ độ của A trên trục x)





Điện trường quanh một dây dẫn thẳng tích điện đều

- Tính dl từ toạ độ l của điểm B trên trục z

$$l = a \tan \alpha \Rightarrow dl = \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

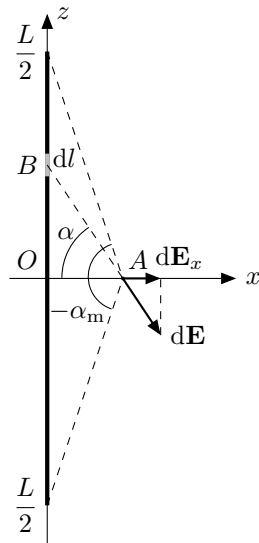
$$\Rightarrow dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha}{\left(\frac{a}{\cos \alpha}\right)^2} \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l \cos \alpha}{a} d\alpha$$

$$\Rightarrow E_x = \int_{-\alpha_{\max}}^{\alpha_{\max}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l \cos \alpha}{a} d\alpha = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l}{a} \sin \alpha_{\max}$$

→ Trong hệ toạ độ trụ

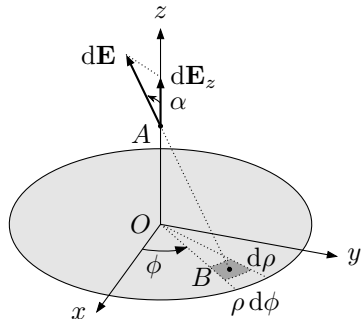
$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 \rho} \sin \alpha_{\max} \mathbf{a}_\rho$$

- Trường hợp dây thẳng dài vô hạn: $\alpha_{\max} \rightarrow 90^\circ$



Điện trường trên trục một đĩa tròn tích điện đều

- Đĩa tròn phẳng bán kính R có điện tích phân bố đều với mật độ điện mặt ρ_s . Tính cường độ điện trường tại điểm A nằm trên trục đối xứng của đĩa.
- Chia đĩa tròn thành các diện tích vô cùng nhỏ $ds \rightarrow$ điện tích điểm $dq \rightarrow$ điện trường $d\mathbf{E} \rightarrow$ xếp chồng thành $\mathbf{E}$
- Do A nằm trên trục đối xứng $\rightarrow$ điện trường ở các phía đều nhau $\rightarrow$ vector $\mathbf{E}$ nằm trên trục đối xứng



$\rightarrow$ Sử dụng hệ tọa độ trụ

- Điện tích của diện tích vô cùng nhỏ ds là $dq = \rho_s ds = \rho_s \rho d\rho d\phi$

$\rightarrow$ Cường độ điện trường do dq sinh ra (với d là khoảng cách từ A đến ds):

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_s \rho d\rho d\phi}{d^2} \Rightarrow dE_z = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho d\rho d\phi}{d^2} \cos\alpha$$

Điện trường trên trục một đĩa tròn tích điện đều

- Ta có $\cos \alpha = \frac{z}{d}$ với z là toạ độ của A

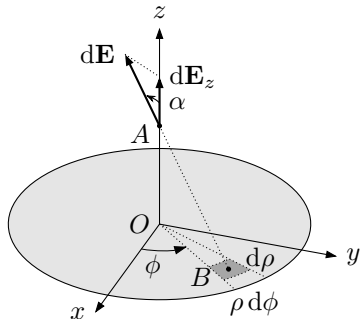
$$\Rightarrow dE_z = \frac{z\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho d\rho d\phi}{d^3}$$

- d không phụ thuộc ϕ , chỉ phụ thuộc ρ

$$d = \sqrt{z^2 + \rho^2}$$

→ Hai biến ϕ và ρ độc lập với nhau

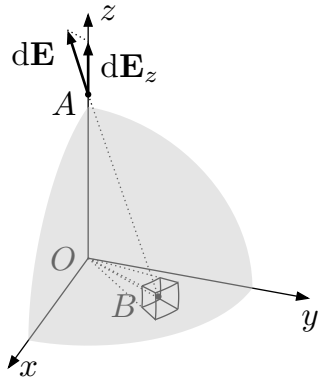
$$\begin{aligned} \Rightarrow E &= \int_S \frac{z\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho d\rho d\phi}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} = \frac{z\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \rho(z^2 + \rho^2)^{-3/2} d\rho \\ &= \frac{z\rho_s}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{1}{2} (z^2 + \rho^2)^{-3/2} d(z^2 + \rho^2) = \frac{-z\rho_s}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \Big|_0^R \\ &= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right). \text{ Mặt rộng vô hạn: } R \rightarrow \infty \Rightarrow E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$





Điện trường quanh một khối cầu tích điện đều

- Khối cầu bán kính R có điện tích phân bố đều với mật độ điện khối ρ_v . Tính cường độ điện trường tại điểm A nằm ngoài khối cầu.
- Chia khối cầu thành các thể tích vô cùng nhỏ $dv \rightarrow$ điện tích điểm $dq \rightarrow$ điện trường $d\mathbf{E} \rightarrow$ xếp chồng thành $\mathbf{E}$
- Do khối cầu tích điện đều $\rightarrow$ ở ngoài khối cầu điện trường ở các phía đều nhau $\rightarrow$ vector $\mathbf{E}$ có hướng qua tâm khối cầu



→ Sử dụng hệ tọa độ cầu

- Điện tích của thể tích vô cùng nhỏ dv là $dq = \rho_v dv = \rho_v r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

→ Cường độ điện trường do dq sinh ra (với d là khoảng cách từ A đến dv):

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_v r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi}{d^2} \Rightarrow dE_z = \frac{\rho_v}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi}{d^2} \cos \alpha$$



Điện trường quanh một khối cầu tích điện đều

- Ta có $\cos \alpha = \frac{z - r \cos \theta}{d}$

- Và $d^2 = r^2 - (r \cos \theta)^2 + (z - r \cos \theta)^2$

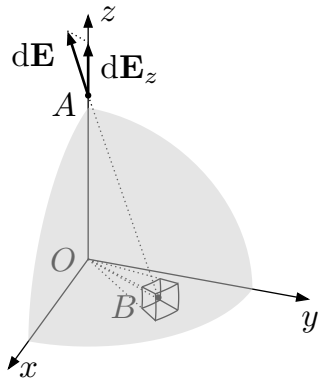
$$\rightarrow d^2 = r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta$$

$$\Rightarrow dE_z = \frac{\rho_v}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2(z - r \cos \theta) \sin \theta dr d\theta d\phi}{(r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta)^{3/2}}$$

- Nhận thấy: có thể tính tích phân theo ϕ độc lập với phần còn lại

$$\Rightarrow E = \frac{\rho_v}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{r^2(z - r \cos \theta) \sin \theta dr d\theta}{(r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta)^{3/2}}$$

- Đặt $r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta = a^2 \rightarrow 2a da = 2rz \sin \theta d\theta \rightarrow r \sin \theta d\theta = \frac{a da}{z}$





Điện trường quanh một khối cầu tích điện đều

- Và $z - r \cos \theta = \frac{a^2 - r^2 + z^2}{2z}$

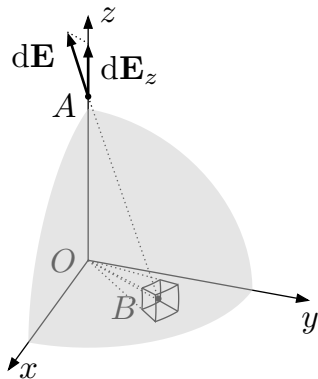
→ Xét cận của a theo θ

- $\theta = \pi \rightarrow a = z + r$

- $\theta = 0 \rightarrow a = z - r$

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho_v}{2\epsilon_0} \int_{r=0}^R \frac{r dr}{2z^2} \int_{a=z-r}^{z+r} \frac{a^2 - r^2 + z^2}{a^2} da \\ &= \frac{\rho_v}{2\epsilon_0} \int_{r=0}^R \frac{r^2 dr}{2z^2} = \frac{\rho_v R^3}{3\epsilon_0 z^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_v}{4\pi\epsilon_0 z^2} \\ &= \frac{V_{\text{cầu}} \rho_v}{4\pi\epsilon_0 z^2} = \frac{Q_{\text{cầu}}}{4\pi\epsilon_0 z^2} \rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q_{\text{cầu}}}{4\pi\epsilon_0 z^2} \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

- Nhận xét: điện trường tại một điểm nằm ngoài khối cầu tương đương với điện trường của một điện tích điểm $Q = Q_{\text{cầu}}$ đặt tại tâm quả cầu
- Bài tập: tính trường hợp điểm A nằm trong khối cầu ($z < R$)





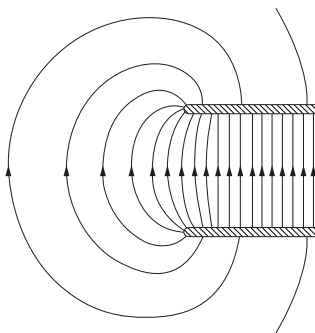
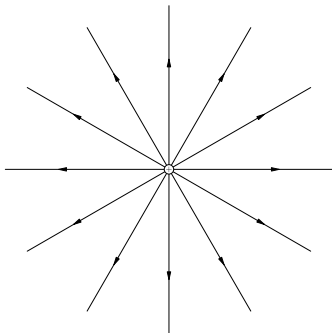
Nội dung chương

2 Điện trường tĩnh

- Điện trường và vector cường độ điện trường
- Một số hệ điện tích phân bố “liên tục”
- Đường sức điện trường
- Cảm ứng điện, điện thông, và định luật Gauss
- Năng lượng, điện thế, và hiệu điện thế
- Lưỡng cực điện
- Điện môi và vật dẫn
- Điện dung của hệ vật dẫn cô lập
- Phương trình Poisson – Laplace

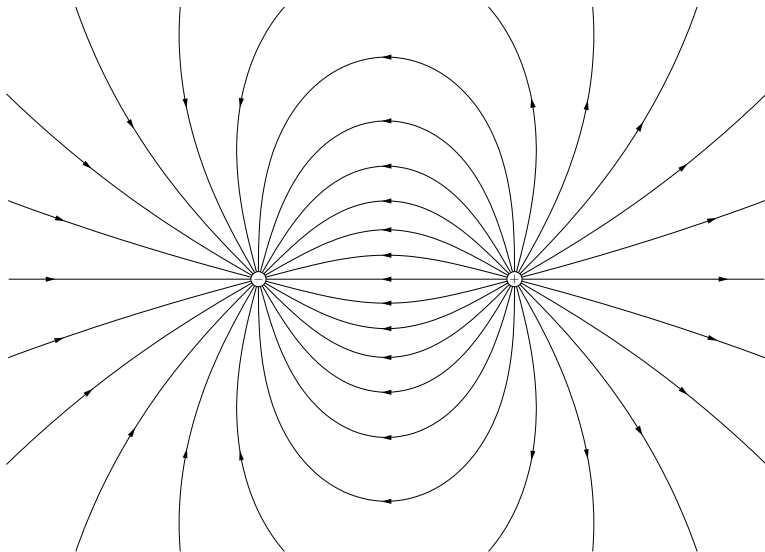
Đường sức điện trường

- Điện trường là trường vector nên có thể dùng các đường sức để biểu diễn
- Chiều của đường sức là chiều của vector cường độ điện trường $\mathbf{E}$
- Đường sức điện trường đi ra khỏi điện tích dương và đi vào điện tích âm
- Mật độ đường sức thể hiện độ lớn của cường độ điện trường
- Các đường sức không giao nhau. Trường đều: các đường sức song song





Đường sức điện trường





Nội dung chương

2 Điện trường tĩnh

- Điện trường và vector cường độ điện trường
- Một số hệ điện tích phân bố “liên tục”
- Đường sức điện trường
- **Cảm ứng điện, điện thông, và định luật Gauss**
- Năng lượng, điện thế, và hiệu điện thế
- Lưỡng cực điện
- Điện môi và vật dẫn
- Điện dung của hệ vật dẫn cô lập
- Phương trình Poisson – Laplace



Cảm ứng điện & điện thông

Thí nghiệm của Faraday về “dịch chuyển” (cảm ứng) điện

Faraday làm thí nghiệm với 2 quả cầu kim loại đồng tâm, trong đó quả cầu ngoài gồm 2 vỏ bán cầu ghép lại, giữa 2 quả cầu có một lớp chất cách điện.

- Tích điện dương Q cho quả cầu trong
 - Ghép 2 nửa quả cầu ngoài bao quanh quả cầu trong; giữa 2 quả cầu là một lớp cách điện
 - Nối đất tức thời quả cầu ngoài để xả nhanh điện tích ở mặt ngoài
 - Gỡ 2 bán cầu ra đem đo thấy chúng có điện tích âm $-Q$ với độ lớn bằng điện tích quả cầu trong
- Có sự “dịch chuyển” (cảm ứng) điện từ quả cầu trong ra quả cầu ngoài gọi là “*dịch chuyển điện*” hoặc “*điện thông*” (thông lượng cảm ứng điện)



Cảm ứng điện & điện thông

Điện thông và vector dịch chuyển điện (mật độ điện thông)

- Điện thông (tổng thông lượng cảm ứng điện) có giá trị bằng điện tích quả cầu trong (cảm ứng ra quả cầu ngoài)

$$\psi = Q_{\text{trong}}$$

- Lượng hoá sự dịch chuyển bằng **vector dịch chuyển điện $\mathbf{D}$** tương ứng với mật độ của điện thông trên một đơn vị diện tích

→ **$\mathbf{D}$ có phương trùng với $\mathbf{E}$ và có độ lớn là mật độ của điện thông**

→ Điện thông qua một mặt kín S bất kỳ

$$\psi = \oint_S \mathbf{D} \, ds$$

→ Nếu trong mặt kín S có điện tích Q_{trong} thì với mọi dạng của mặt S và với mọi dạng phân bố của Q_{trong} (không cần phải là các quả/mặt cầu)

$$\oint_S \mathbf{D} \, ds = Q_{\text{trong}}$$



Định luật Gauss dạng tích phân

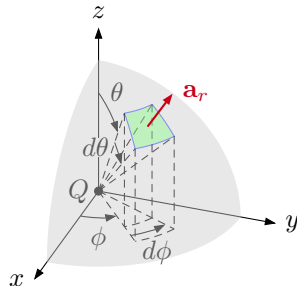
- Xét thông lượng của điện trường $\mathbf{E}$ do điện tích điểm Q sinh ra qua một mặt cầu S bán kính r với Q nằm ở tâm mặt cầu đó

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{s} = \oint_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r d\mathbf{s}$$

- Vector mặt nguyên tố (trên mặt cầu bán kính r) $d\mathbf{s} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{s} &= \oint_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\phi \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

- Kết quả này không phụ thuộc vào bán kính mặt cầu $\rightarrow$ **đúng với kích thước tùy ý**
- Hệ điện tích phân bố bất kỳ là xếp chồng của các điện tích điểm $\rightarrow$ **đúng với mọi hệ điện tích**





Định luật Gauss dạng tích phân

- Mở rộng kết quả cho mặt kín S bất kỳ bao quanh hệ điện tích Q bất kỳ
- Định luật Gauss dạng tích phân[¶]

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- Mặt khác, ta có điện thông của Q qua mặt kín S

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{s} = Q$$
$$\Rightarrow \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

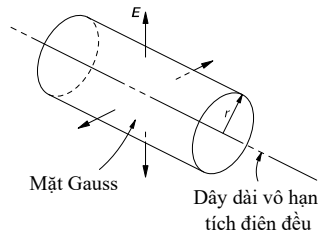
- Ứng dụng định luật Gauss trong tính toán: Do định luật đúng với hệ Q bất kỳ và mặt S bất kỳ, ta chọn các mặt S (gọi là mặt Gauss) sao cho
 - Dễ tính tổng điện tích Q trong mặt S
 - Dạng của mặt S dễ tính các tích phân mặt

[¶]Ta đang xét các đại lượng trong chân không với hằng số điện môi ϵ_0 . Các chất điện môi khác có hệ số điện môi $\epsilon \neq \epsilon_0$. Nếu là điện môi phi tuyến thì $\epsilon \neq \text{const}$.



Ứng dụng định luật Gauss trong tính toán (1)

- Dây thẳng dài vô hạn tích điện đều mật độ ρ_l . Tính $\mathbf{E}$ quanh dây.
 - Phân tích: dây dài vô hạn $\rightarrow$ mọi mặt phẳng vuông góc với dây đều là mặt đối xứng $\rightarrow$ vector $\mathbf{E}$ tại mọi điểm đều vuông góc với dây và đi qua dây $\rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}(\rho)$ chỉ phụ thuộc ρ trong hệ tọa độ trụ
- $\rightarrow$ Chọn mặt Gauss S là mặt trụ bán kính ρ , chiều cao h , có trục đối xứng trùng với dây
- $\rightarrow$ Tổng điện tích nằm trong mặt S là điện tích đoạn dây có chiều dài $l = h \rightarrow Q = \rho_l h$
- Định luật Gauss $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Q/\epsilon_0$
 - Ở 2 mặt đáy $\mathbf{E} \perp d\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \rightarrow$ chỉ cần tính cho mặt bên $\rho = \text{const} \rightarrow E(\rho) = \text{const}$
- $\Rightarrow \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E(\rho) \oint_S ds = E(\rho) \cdot (\text{Diện tích mặt bên}) = E(\rho) \cdot 2\pi R h$
- $\Rightarrow E \cdot 2\pi \rho h = \rho_l h / \epsilon_0 \Rightarrow E = \frac{\rho_l}{2\pi \epsilon_0 \rho} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho_l}{2\pi \epsilon_0 \rho} \mathbf{a}_\rho$





Ứng dụng định luật Gauss trong tính toán (2)

- Mặt phẳng rộng vô hạn tích điện đều mật độ ρ_s . Tính $\mathbf{E}$ quanh mặt.
- Phân tích: mặt rộng vô hạn $\rightarrow$ mọi điểm đều nằm trên trục đối xứng của mặt $\rightarrow$ vector $\mathbf{E}$ tại mọi điểm đều vuông góc với mặt $\rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}(z)$ chỉ phụ thuộc z (nếu có) trong hệ toạ độ Descartes

$\rightarrow$ Chọn mặt Gauss S là hình hộp cạnh a

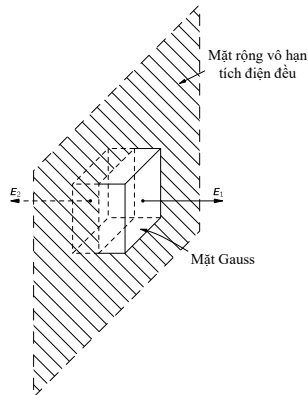
$\rightarrow$ Tổng điện tích nằm trong mặt S là điện tích mặt có diện tích $s = a^2 \rightarrow Q = \rho_s a^2$

● Định luật Gauss $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Q/\epsilon_0$

● Chỉ cần tính cho các mặt song song với mặt tích điện $z = \text{const} \rightarrow E(z) = \text{const}$

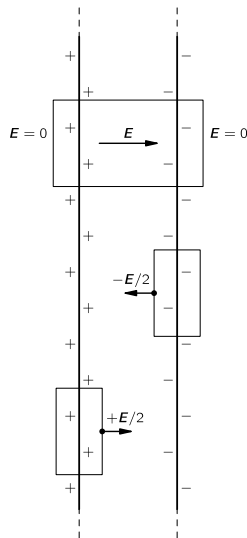
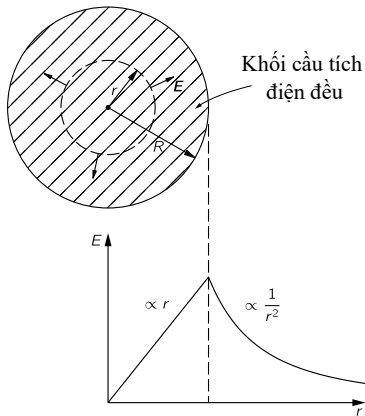
$$\Rightarrow \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E(z) \cdot (\text{Diện tích 2 mặt}) \\ = E(z) \cdot 2 \cdot a^2$$

$$\Rightarrow E \cdot 2a^2 = \rho_s a^2 / \epsilon_0 \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_z$$



Ứng dụng định luật Gauss trong tính toán (3)

- Bài tập: Tính điện trường của một số hệ phân bố đều khác





Định luật Gauss dạng vi phân

Định luật Gauss dạng vi phân – Phương trình Maxwell–Heaviside thứ nhất

- Ứng dụng định lý Ostrogradsky–Gauss trong giải tích đa biến

$$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{D} \, dV$$

với S là mặt bao quanh thể tích V

- Với một hệ điện tích Q phân bố bất kỳ trong không gian

$$Q = \int_V \rho_v \, dV \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_v$$

→ Phương trình Maxwell–Heaviside thứ nhất (trong chân không)

$$\Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$



Nội dung chương

2 Điện trường tĩnh

- Điện trường và vector cường độ điện trường
- Một số hệ điện tích phân bố “liên tục”
- Đường sức điện trường
- Cảm ứng điện, điện thông, và định luật Gauss
- Năng lượng, điện thế, và hiệu điện thế
- Lưỡng cực điện
- Điện môi và vật dẫn
- Điện dung của hệ vật dẫn cô lập
- Phương trình Poisson – Laplace



Khả năng sinh công (năng lượng) của điện trường

- Điện trường $\mathbf{E}$ tác dụng lực $\mathbf{F}$ lên điện tích q tại điểm A với $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$
- Tạm bỏ qua các lực khác (nếu có), $\mathbf{F}$ làm điện tích q chuyển động
→ **điện trường $\mathbf{E}$ sinh công (năng lượng)**
- Năng lượng do $\mathbf{E}$ sinh ra để dịch chuyển q một đoạn vô cùng nhỏ $d\mathbf{l}$ là

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

- Xét rằng ở xa vô cùng không có điện trường $\mathbf{E}(\infty) = 0$ (C/m²)
→ không có năng lượng $W(\infty) = 0$ (J)
- Năng lượng do $\mathbf{E}$ sinh ra để dịch chuyển q từ điểm A ra xa vô cùng là toàn bộ năng lượng mà $\mathbf{E}$ có thể truyền cho q tại điểm A

$$W = q \int_A^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$



Điện thế và hiệu điện thế

- Nếu không có điện tích q thì tại điểm A , điện trường $\mathbf{E}$ vẫn có khả năng sinh ra năng lượng $\rightarrow$ gọi là *điện thế*

$$V_A = \frac{W}{q} = \int_A^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

(Công sinh ra để dịch chuyển một đơn vị điện tích ra xa vô cùng)

- Tại một điểm B trong điện trường cũng có điện thế

$$V_B = \int_B^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$\rightarrow$ Hiệu điện thế giữa 2 điểm A và B

$$U_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

(Công sinh ra để dịch chuyển một đơn vị điện tích từ A đến B)

- Trong nhiều trường hợp ta thường quan tâm đến hiệu điện thế giữa các điểm $\rightarrow$ có thể *chọn một điểm tham chiếu có điện thế quy ước là 0 V*



Điện thế trong điện trường của điện tích điểm

- Xét điểm A cách điện tích điểm Q một khoảng R
 - Dùng hệ tọa độ cầu với tâm gắn với điện tích điểm
- Điện trường hướng tâm $\rightarrow d\mathbf{l} = dr \mathbf{a}_r$

$$\begin{aligned}\Rightarrow V_A &= \int_A^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \left. \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right|_R^\infty = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\end{aligned}$$

- Tích phân trên không phụ thuộc vào đường đi từ A đến ∞
(Bài tập: Chứng minh $\text{rot } \mathbf{E} = 0$)
 - Điện trường tĩnh của hệ điện tích Q bất kỳ là xếp chồng điện trường của các điện tích điểm
- Điện trường tĩnh là một trường thế
- Trường điện thế V (vô hướng) là thế vị của trường vector $\mathbf{E}$



Điện thế của một số hệ điện tích phân bố liên tục

Điện thế của điểm trên trục đối xứng của vòng dây tròn tích điện đều

- Tính điện thế tại điểm A nằm trên trục đối xứng của một vòng dây tròn bán kính R tích điện đều với mật độ điện dài ρ_l
- Dùng hệ toạ độ trụ với tâm O trùng với tâm đường tròn, trục Oz là trục đối xứng của vòng dây $\rightarrow z$ là toạ độ của A trên trục Oz
- Xét một đoạn dl vô cùng nhỏ trên dây $\rightarrow$ coi là điện tích điểm $dq = \rho_l dl$ có điện thế dV_A tại điểm A cách dl một khoảng $d = \sqrt{z^2 + R^2}$ là

$$\begin{aligned} dV_A &= \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{\rho_l dl}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}} \\ &= \frac{\rho_l R d\phi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}} \\ \Rightarrow V_A &= \int_0^{2\pi} \frac{\rho_l R d\phi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{\rho_l R}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}} \end{aligned}$$



Điện thế của một số hệ điện tích phân bố liên tục

Hiệu điện thế giữa 2 điểm trong điện trường của dây dài vô hạn tích điện đều

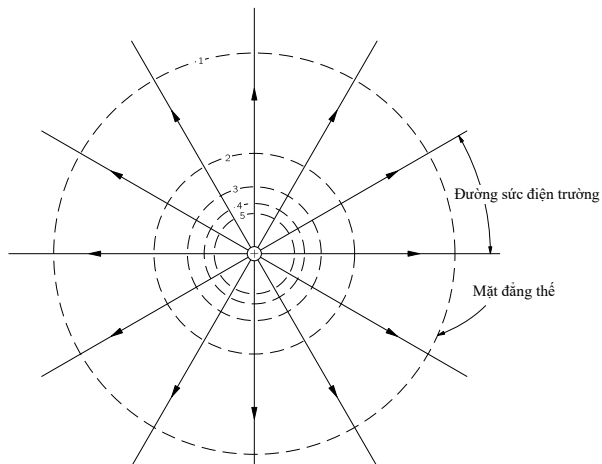
- Tính hiệu điện thế giữa 2 điểm A và B cách một dây dài vô hạn tích điện đều với mật độ điện dài ρ_l khoảng cách tương ứng ρ_A và ρ_B
 - Dùng hệ tọa độ trụ với trục z gắn với dây
- Vector đường nguyên tố $d\mathbf{l} = d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z$
- Hiệu điện thế giữa A và B là

$$\begin{aligned}
 U_{AB} &= \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\
 &= \int_A^B \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho \cdot (d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z) \\
 &= \int_A^B \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\rho} d\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho \Big|_A^B = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_B}{\rho_A}
 \end{aligned}$$

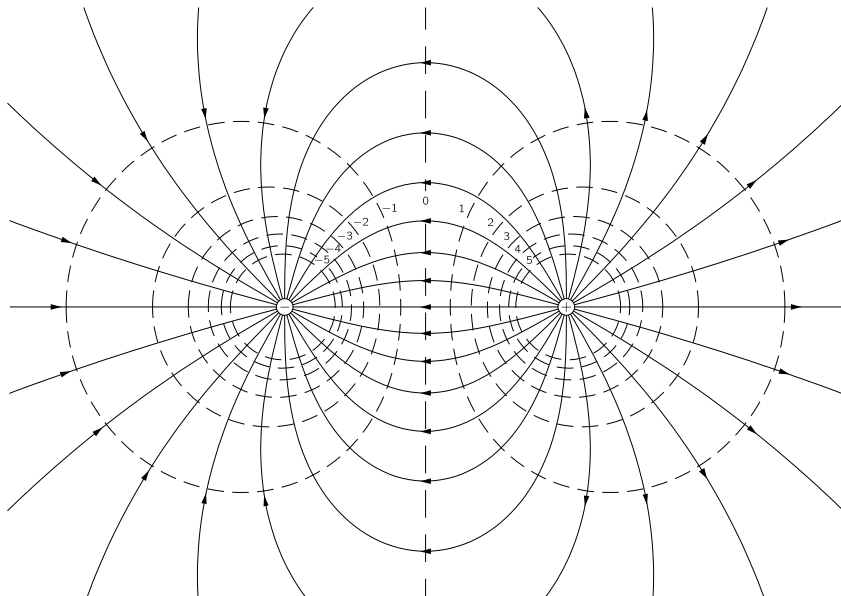


Mặt đẳng thế

- Trường điện thế là một trường vô hướng $\rightarrow$ có thể biểu diễn đồ họa bằng các mặt đẳng trị (mặt mức) gọi là mặt đẳng thế
- Ví dụ: mặt đẳng thế của điện tích điểm là các đường tròn đồng tâm



Mặt đẳng thế





Cường độ điện trường & gradient của trường điện thế

- Hiệu điện thế giữa 2 điểm A và B trong điện trường tĩnh không phụ thuộc đường đi từ A đến B

$$V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_A - V_B$$

- Xét trường điện thế V là trường vô hướng $\rightarrow$ theo định lý gradient

$$\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\mathbf{l} = V_B - V_A$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

$\rightarrow$ Vector cường độ điện trường chỉ chiều giảm lớn nhất của điện thế



Năng lượng của một hệ điện tích

- Giả sử không xét đến các lực khác như lực hấp dẫn
- Ban đầu trong không gian không có điện trường $\rightarrow$ để dịch chuyển điện tích điểm Q_1 về vị trí của nó (gọi là điểm 1) không tiêu tốn năng lượng

$$W_1 = 0(\text{J})$$

- Trong không gian có điện trường của điện tích điểm $Q_1 \rightarrow$ để dịch chuyển một điện tích điểm Q_2 (từ xa vô cùng) về vị trí của nó trong điện trường cần một năng lượng:

$$W_2 = Q_2 V_{2 \leftarrow 1} = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

trong đó $V_{2 \leftarrow 1}$ là điện thế tại điểm 2 do điện tích Q_1 (tại điểm 1) tạo ra

- Trong điện trường của Q_1 và Q_2 , dịch chuyển điện tích điểm Q_3 về vị trí của nó tại điểm 3 cần một năng lượng

$$W_3 = Q_3 V_{3 \leftarrow 12} = Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right)$$



Năng lượng của một hệ điện tích

→ Tổng năng lượng của hệ 3 điện tích điểm

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right)$$

● Biểu diễn lại dưới dạng đối xứng (gấp đôi các phần tử rồi chia 2)

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \left[Q_1 \left(\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{31}} \right) + Q_2 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{32}} \right) \right. \\ &\quad \left. + Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} (Q_1 V_{1\leftarrow 23} + Q_2 V_{2\leftarrow 13} + Q_3 V_{3\leftarrow 12}) \end{aligned}$$

→ Tổng quát hoá cho hệ n điện tích điểm

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i$$



Năng lượng của một hệ điện tích

- Hệ n điện tích điểm

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i$$

→ Tổng quát hoá cho hệ điện tích phân bố “liên tục” trong không gian

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{không gian}} V dq = \frac{1}{2} \int_{\text{k/g}} V \rho_v dv$$

- Ta có $\rho_v = \text{div } \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} \rightarrow$ cần tính $V \rho_v = V(\nabla \cdot \mathbf{D})$
- Nhớ lại: độ tản div là “vi phân khối” $\rightarrow$ dùng đạo hàm hàm hợp

→ $\nabla \cdot (V\mathbf{D}) = V(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla V) \rightarrow V \rho_v = \nabla \cdot (V\mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot (\nabla V)$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \int_{\text{k/g}} [\nabla \cdot (V\mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot (\nabla V)] dv$$



Năng lượng của một hệ điện tích

- Năng lượng của hệ điện tích

$$W = \frac{1}{2} \int_{k/g} [\nabla \cdot (V\mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot (\nabla V)] dv$$

- Theo định lý Ostrogradsky–Gauss, với mặt kín S bao quanh vùng không gian đang xét, thành phần thứ nhất:

$$\int_{k/g} \nabla \cdot (V\mathbf{D}) dv = \oint_S V\mathbf{D} ds$$

- Vùng không gian có thể xét tới vô cùng, mà $V(\infty) = 0 \rightarrow \oint_S V\mathbf{D} ds = 0$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \int_{k/g} -\mathbf{D} \cdot (\nabla V) dv = \frac{1}{2} \int_{k/g} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{2} \int_{k/g} \epsilon_0 E^2 dv$$

→ Định nghĩa **hàm mật độ năng lượng** $\rho_w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ (J/m³)



Nội dung chương

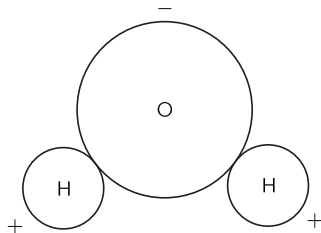
2 Điện trường tĩnh

- Điện trường và vector cường độ điện trường
- Một số hệ điện tích phân bố “liên tục”
- Đường sức điện trường
- Cảm ứng điện, điện thông, và định luật Gauss
- Năng lượng, điện thế, và hiệu điện thế
- **Lưỡng cực điện**
- Điện môi và vật dẫn
- Điện dung của hệ vật dẫn cô lập
- Phương trình Poisson – Laplace



Mô hình lưỡng cực điện

- **Lưỡng cực điện** là một mô hình tốt dùng để xấp xỉ nhiều hệ điện tích trong tự nhiên, chẳng hạn mô hình nguyên tử và phân tử
 - Ví dụ phân tử nước H_2O có tổng điện tích âm bằng tổng điện tích dương (cân bằng điện tích), nhưng sự phân bố các điện tích không đều (do kích thước đám mây electron khác nhau) $\rightarrow$ một phía có nhiều điện tích dương, một phía có nhiều điện tích âm
- $\rightarrow$ Xung quanh các hệ điện tích cân bằng phân bố gần nhau không đều này có điện trường và điện thế
- $\rightarrow$ Mô hình lưỡng cực điện





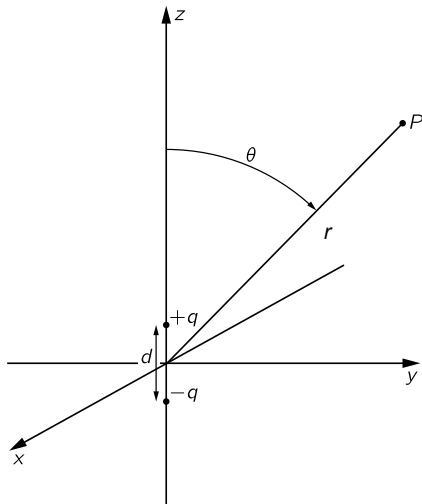
Mô hình lưỡng cực điện

- Lưỡng cực điện là mô hình gồm **2 điện tích bằng nhau trái dấu** cách nhau một **khoảng d rất nhỏ** (so với kích thước xung quanh)
- Gọi R^+ và R^- là khoảng cách từ điểm P tới $+Q$ và $-Q$
- Điện thế tại P

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R^+} - \frac{1}{R^-} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^- - R^+}{R^- R^+} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} \end{aligned}$$

→ Cường độ điện trường tại P
(hệ tọa độ cầu)

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\text{grad}} V \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \end{aligned}$$



Mô hình lưỡng cực điện

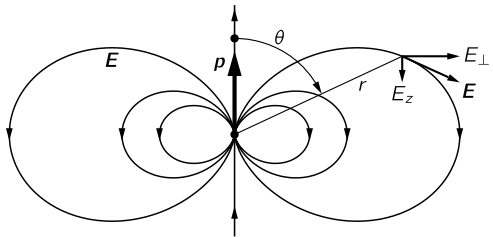
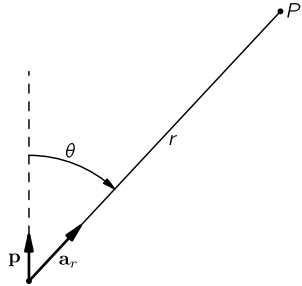
- Mô-men lưỡng cực

$$\mathbf{p} = Q \mathbf{d}$$

- Do $\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_r = d \cos \theta$

$$\Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_r}{r^2} = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- Đường sức điện trường của lưỡng cực điện





Nội dung chương

2 Điện trường tĩnh

- Điện trường và vector cường độ điện trường
- Một số hệ điện tích phân bố “liên tục”
- Đường sức điện trường
- Cảm ứng điện, điện thông, và định luật Gauss
- Năng lượng, điện thế, và hiệu điện thế
- Lưỡng cực điện
- Điện môi và vật dẫn
- Điện dung của hệ vật dẫn cô lập
- Phương trình Poisson – Laplace

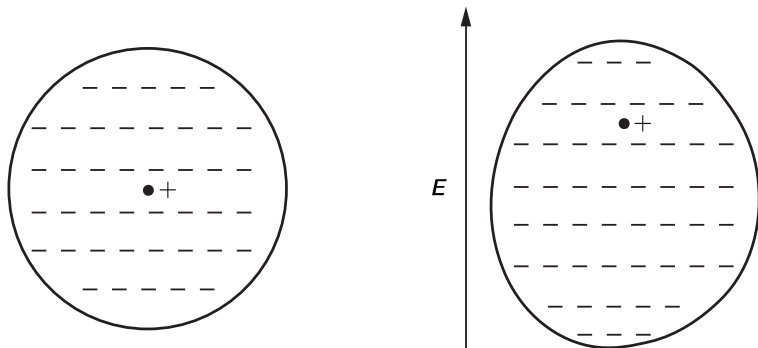


Chất dẫn điện, chất cách điện, và chất bán dẫn

- Vật liệu điện được cấu tạo từ các nguyên tử gồm **hạt nhân** và **điện tử** (electron) có **liên kết** với nhau
- Nếu **liên kết này yếu** → nhiều điện tử có thể di chuyển tự do trong vật liệu → tạo thành các ion tự do (ion âm là các điện tử, ion dương là các nguyên tử thiếu các điện tử do chúng di chuyển tự do) → nếu đặt trong điện trường các ion có thể dịch chuyển → có thể dẫn điện → **vật dẫn**
- Nếu **liên kết này mạnh** → các điện tử bị gắn chặt với hạt nhân → có rất ít ion tự do → không dẫn điện → **điện môi** (chất cách điện)
- Nếu tùy điều kiện mà **liên kết này lúc mạnh lúc yếu** → lúc dẫn điện lúc cách điện → **chất bán dẫn**. Ta tạm thời không xét chất bán dẫn trong môn học này.

Mô hình lưỡng cực của điện môi trong điện trường

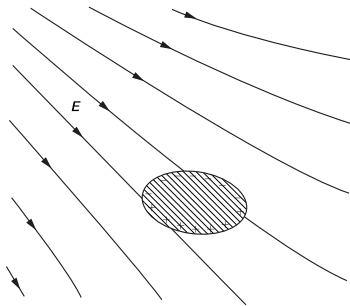
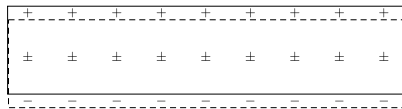
- Nếu không có điện trường ngoài, các nguyên tử trong điện môi trung hoà về điện
- Khi có điện trường ngoài, hạt nhân mang điện dương và điện tử mang điện âm bị “kéo” về 2 hướng ngược nhau $\rightarrow$ mô hình lưỡng cực điện



Phân bố điện tử trong nguyên tử bị phân cực do điện trường ngoài

Mô hình lưỡng cực của điện môi trong điện trường

- Một khối điện môi trong điện trường ngoài được xét như một tập hợp các lưỡng cực điện
- Bên trong khối điện môi, các lưỡng cực điện có cực $(-)$ và cực $(+)$ xếp liên tiếp đan xen → **trung hoà về điện**
- Trên bề mặt khối điện môi là các lớp điện tích $(-)$ và $(+)$ phân bố ở 2 phía theo chiều tác động của điện trường ngoài
- Ta sẽ xét các điện tích trên bề mặt khối điện môi Q_b





Mô hình lưỡng cực của điện môi trong điện trường

- Mỗi lưỡng cực điện có vector mô-men lưỡng cực

$$\mathbf{p} = Q \mathbf{d}$$

- Trong thể tích Δv có n lưỡng cực $\rightarrow$ có mô-men lưỡng cực tổng

$$\mathbf{p}_{\text{tổng}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i$$

$\rightarrow$ Định nghĩa **vector mật độ lưỡng cực**

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i$$



Mô hình lưỡng cực của điện môi trong điện trường

- Xét một mặt ΔS rất nhỏ bên trong điện môi. Vector mật độ lưỡng cực $\mathbf{P}$ tạo với pháp tuyến $\Delta \mathbf{S}$ một góc θ
- Nếu có n lưỡng cực có điện tích Q tạo thành 2 lớp điện tích ở 2 phía của mặt ΔS tổng điện tích bề mặt của mặt ΔS là

$$\Delta Q_b = nQ\mathbf{d} \cdot \Delta \mathbf{S}$$

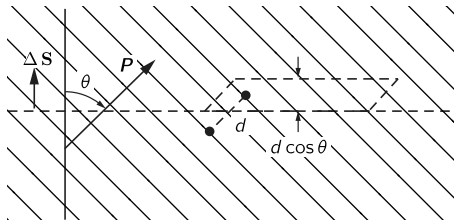
- Do mặt ΔS rất nhỏ nên lượng lưỡng cực có trong mặt ΔS chính là mật độ lưỡng cực $\mathbf{P} = nQ\mathbf{d}$; do đó

$$\Delta Q_b = \mathbf{P} \cdot \Delta \mathbf{S}$$

- Xét mặt kín $S \rightarrow$ tổng điện tích bề mặt có trong mặt S là

$$Q_b = - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s}$$

(Dấu trừ do $d\mathbf{s}$ hướng ra ngoài)





Điện trường trong điện môi

- Tổng điện tích bề mặt có trong mặt kín S là

$$Q_b = - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s}$$

- Trong mặt kín S bất kỳ có **điện tích bề mặt Q_b** do phân cực và **điện tích tự do Q** $\rightarrow$ **điện tích tổng**

$$Q_t = Q_b + Q$$

$$\Rightarrow Q = Q_t - Q_b$$

- Theo định luật Gauss với tổng điện tích trong mặt kín S

$$Q_t = \oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\Rightarrow Q = \oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{s}$$



Điện trường trong điện môi

- Từ quan hệ

$$Q = \oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{s}$$

→ Vector dịch chuyển điện (mật độ điện thông) với điện môi

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

- Nếu vật liệu là *đẳng hướng* ($\mathbf{P} \parallel \mathbf{E}$) với $\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$

$$\Rightarrow \mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$$

- Trong đó

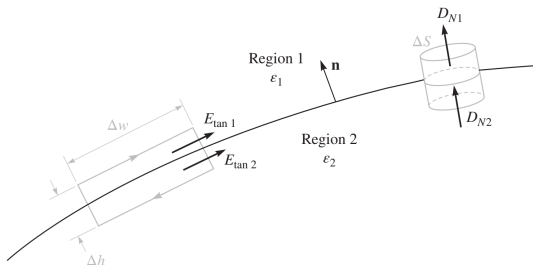
- χ_e là *hằng số phân cực điện* của vật liệu (càng lớn càng dễ phân cực)
- $\epsilon_r > 1$ là *hằng số điện môi tương đối* của vật liệu (với chân không)
- ϵ là *hằng số điện môi tuyệt đối* của vật liệu

- Các công thức tính $\mathbf{F}$, $\mathbf{E}$, và V chỉ cần thay $\epsilon_0 = \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

Điều kiện biên giữa hai lớp điện môi

- Xét 2 lớp điện môi (đẳng hướng) có hằng số ϵ_1 và ϵ_2 tiếp giáp nhau tại một bề mặt. Xác định quan hệ giữa $\mathbf{E}_1$ với $\mathbf{E}_2$ và $\mathbf{D}_1$ với $\mathbf{D}_2$.
- Vector $\mathbf{E}_1$ và $\mathbf{E}_2$ (cũng như $\mathbf{D}_1$ và $\mathbf{D}_2$) với hướng bất kỳ đều có các thành phần tiếp tuyến và vuông góc với bề mặt tiếp giáp.
- “Thủ thuật”: chỉ xét thành phần $\mathbf{E}_t$ tiếp tuyến và thành phần $\mathbf{D}_n$ vuông góc dựa trên 2 quan hệ cơ bản (đúng với mọi môi trường):

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \text{ và } \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$$





Điều kiện biên giữa hai lớp điện môi

- “Thủ thuật”: chỉ xét thành phần $\mathbf{E}_{t1}$ và $\mathbf{E}_{t2}$ tiếp tuyến với bề mặt. Do $\mathbf{E}$ là trường thế $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \rightarrow$ xét một đường L khép kín.
- Để tiện lấy tích phân đường, xét L là một hình chữ nhật nhỏ đi qua bề mặt tiếp giáp với cạnh Δh vô cùng nhỏ ($\rightarrow$ coi như ≈ 0) và cạnh Δw đủ nhỏ để coi đoạn tiếp giáp trong L là đoạn thẳng (song song với Δw).

$$\oint_L \mathbf{E} = \oint_L \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_n = \int_{\Delta w} \mathbf{E}_{t1} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Delta w} \mathbf{E}_{t2} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Delta h} \mathbf{E}_{n1} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Delta h} \mathbf{E}_{n2} \cdot d\mathbf{l}$$

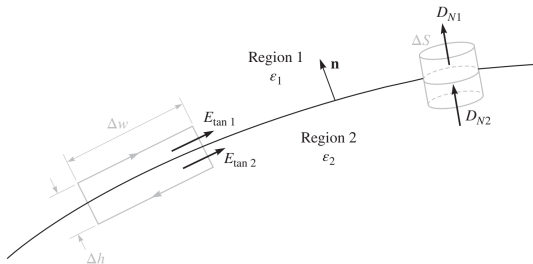
- Do $\Delta h \approx 0$

$$\rightarrow \int_{\Delta h} \mathbf{E}_{n1} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Delta h} \mathbf{E}_{n2} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\rightarrow \oint_L \mathbf{E} = E_{t1} \Delta w - E_{t2} \Delta w = 0$$

$$\rightarrow E_{t1} = E_{t2}$$

$$\rightarrow \frac{D_{t1}}{\epsilon_1} = \frac{D_{t2}}{\epsilon_2} \rightarrow \frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$





Điều kiện biên giữa hai lớp điện môi

- “Thủ thuật”: chỉ xét thành phần $\mathbf{D}_{n1}$ và $\mathbf{D}_{n2}$ vuông góc với bề mặt. Do $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \rightarrow$ xét một mặt S khép kín.
- Để tiện lấy tích phân mặt, xét S là một mặt trụ kín nhỏ đi qua bề mặt tiếp giáp với chiều cao Δh vô cùng nhỏ ($\rightarrow$ coi như ≈ 0) và diện tích ΔS đủ nhỏ để coi mặt tiếp giáp trong S là phẳng (vuông góc với $\Delta \mathbf{S}$).

$$\oint_S \mathbf{D} = \int_{\Delta h \cdot C} \mathbf{D}_{t1} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\Delta h \cdot C} \mathbf{D}_{t2} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\Delta S} \mathbf{D}_{n1} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\Delta S} \mathbf{D}_{n2} \cdot d\mathbf{s}$$

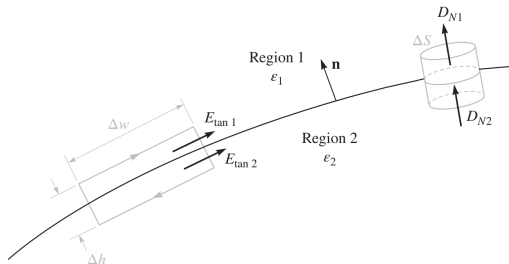
- Do $\Delta h \approx 0$

$$\rightarrow \int_{\Delta h \cdot C} \mathbf{D}_{t1} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\Delta h \cdot C} \mathbf{D}_{t2} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$\rightarrow \oint_S \mathbf{D} = D_{n1} \Delta S - D_{n2} \Delta S = \rho_s \Delta S$$

- Không xét điện tích tự do trong điện môi $\rightarrow \rho_s = 0$ (C/m²)

$$\rightarrow D_{n1} = D_{n2} \rightarrow \epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}$$



Điều kiện biên giữa hai lớp điện môi: khúc xạ

• Nhận xét: điện trường $\mathbf{E}_1$ và $\mathbf{E}_2$ có

- Thành phần tiếp tuyến bằng nhau $\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}$
- Thành phần pháp tuyến khác nhau $\mathbf{E}_{n1} \neq \mathbf{E}_{n2}$

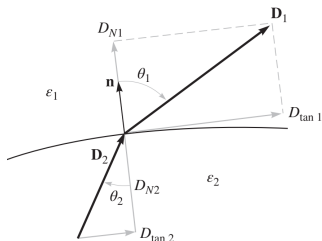
→ $\mathbf{E}_1$ và $\mathbf{E}_2$ không cùng phương

→ $\mathbf{D}_1$ và $\mathbf{D}_2$ không cùng phương

→ Khi đi qua mặt tiếp giáp giữa hai lớp điện môi, $\mathbf{E}$ và $\mathbf{D}$ đổi hướng

→ Chính là *hiện tượng khúc xạ ánh sáng* (do ánh sáng cũng là sóng điện từ)

• Bài tập: Tính góc khúc xạ và góc tới θ_1 và θ_2





Vật dẫn

- Vật dẫn có liên kết điện tử – hạt nhân tương đối yếu $\rightarrow$ các điện tử có thể dễ dàng di chuyển trong vật dẫn
- $\rightarrow$ Nếu vật dẫn được tích điện (âm hoặc dương) $\rightarrow$ các điện tích sẽ dịch chuyển ra bề mặt $\rightarrow$ **không có điện tích bên trong vật dẫn**
- $\rightarrow$ Nếu vật dẫn được đặt trong một điện trường ngoài $\mathbf{E}$ $\rightarrow$ các điện tích âm và dương sẽ dịch chuyển về hai phía theo phương của điện trường $\mathbf{E}$ cho đến khi cân bằng $\rightarrow$ **không có điện tích bên trong vật dẫn**
- $\rightarrow$ Với mọi mặt kín S bên trong vật dẫn (nhỏ tùy ý tại các vị trí tùy ý)

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

- $\rightarrow$ Bên trong vật dẫn luôn trung hoà về điện

$$\mathbf{E}_{\text{trong}} = 0 \rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} V = 0 \rightarrow V = \text{const}$$

- $\rightarrow$ **Vật dẫn là vật đẳng thế** (lưu ý $V = \text{const} \neq 0 \text{ V}$)

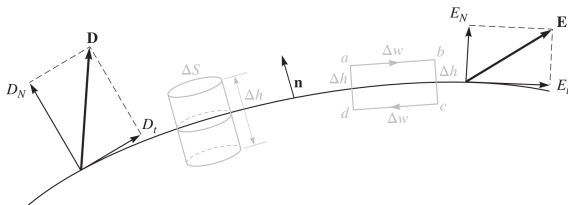
Vật dẫn

- Nếu tính điều kiện biên giữa điện môi và vật dẫn
- Không có điện trường trong vật dẫn
- Ở lớp điện môi không có thành phần tiếp tuyến $\mathbf{E}_t = 0$ (và do đó $\mathbf{D}_t = 0$)

$$\Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{D}_n = \rho_s \mathbf{n}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_n = \frac{\rho_s}{\epsilon} \mathbf{n}$$

- Ngay phía ngoài vật dẫn, vector cường độ điện trường (và dịch chuyển điện / mật độ điện thông) vuông góc với bề mặt vật dẫn





Nội dung chương

2 Điện trường tĩnh

- Điện trường và vector cường độ điện trường
- Một số hệ điện tích phân bố “liên tục”
- Đường sức điện trường
- Cảm ứng điện, điện thông, và định luật Gauss
- Năng lượng, điện thế, và hiệu điện thế
- Lưỡng cực điện
- Điện môi và vật dẫn
- Điện dung của hệ vật dẫn cô lập
- Phương trình Poisson – Laplace



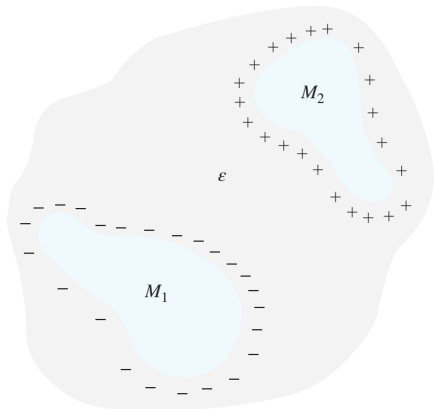
Hệ vật dẫn cô lập: Tụ điện

- Xét một hệ gồm 2 vật dẫn, một vật tích điện $-Q$, vật kia tích điện $+Q$ đặt trong một điện môi ϵ . Hệ không có điện tích nào khác ($\sum Q = 0$ (C))
- Do vật dẫn là vật đẳng thế, mỗi vật có một điện thế V_1 và V_2 tương ứng $\rightarrow$ có **hiệu điện thế U giữa hai vật dẫn**

- $\rightarrow$ Dễ thấy, nếu điện tích Q tăng lên thì U cũng tăng lên tương ứng
- $\rightarrow$ Tỷ lệ giữa điện tích và hiệu điện thế gọi là **điện dung** của hệ

$$C = \frac{Q}{U}$$

- Tụ điện tuyến tính: $C = \text{const}$
- Tụ điện phi tuyến: $C = C(U)$





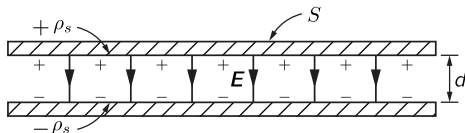
Điện dung của một hệ tụ phẳng

- Xét hệ gồm 2 mặt phẳng rộng “vô hạn” tích điện đều ρ_s trái dấu
- Cường độ điện trường do 1 mặt sinh ra: $E = \frac{\rho_s}{2\epsilon}$
- Cường độ điện trường giữa 2 mặt: $E = \frac{\rho_s}{\epsilon}$
- Nếu 2 mặt có diện tích S tích điện $+Q$ và $-Q$ cách nhau một khoảng d đủ nhỏ để coi là mặt rộng vô hạn: $E = \frac{Q}{\epsilon S}$
- Hiệu điện thế giữa 2 bản tụ:

$$U = \int_0^d \frac{Q}{\epsilon S} dl = \frac{Qd}{\epsilon S}$$

- Điện dung của hệ tụ phẳng:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon S}{d}$$





Điện dung của một hệ tụ phẳng

→ Điện dung của hệ tụ phẳng: $C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon S}{d}$

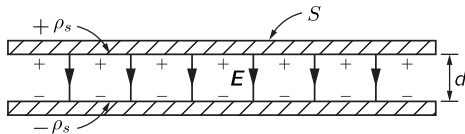
● Nhắc lại: hàm mật độ năng lượng $\rho_w = \frac{1}{2}\epsilon E^2$ (J/m³)

→ Năng lượng chứa trong tụ

$$W = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dv$$

● Nhắc lại: điện trường của mặt phẳng rộng vô hạn $E = \text{const}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W &= \frac{1}{2} \epsilon E^2 V = \frac{1}{2} \epsilon E^2 S d \\ &= \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{Q}{\epsilon S} \right)^2 S d = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon S} \\ &= \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \end{aligned}$$





Nội dung chương

2 Điện trường tĩnh

- Điện trường và vector cường độ điện trường
- Một số hệ điện tích phân bố “liên tục”
- Đường sức điện trường
- Cảm ứng điện, điện thông, và định luật Gauss
- Năng lượng, điện thế, và hiệu điện thế
- Lưỡng cực điện
- Điện môi và vật dẫn
- Điện dung của hệ vật dẫn cô lập
- Phương trình Poisson – Laplace



Phương trình Poisson – Laplace

Các quan hệ cơ bản trong điện trường tĩnh

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_v$$

$$\mathbf{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

- Đây đều là những quan hệ giữa các đại lượng vector

→ Nhiều khi không dễ tính toán

→ Sử dụng đạo hàm cấp 2

→ Hàm Laplacian

$$\operatorname{div} \left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} (V) \right) = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow \nabla^2 V = \operatorname{lapl}(V) = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

- Phương trình Poisson

$$\nabla^2 V = \operatorname{lapl}(V) = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

- Phương trình Laplace (cho vùng không gian *không có điện tích tự do*)

$$\nabla^2 V = \operatorname{lapl}(V) = 0$$



Phương trình Poisson – Laplace

Định lý tồn tại nghiệm duy nhất

- Nếu tồn tại 2 hàm vô hướng V_1 và V_2 sao cho

$$\text{lapl}(V_1) = \text{lapl}(V_2)$$

$$V_1(\text{biên}) = V_2(\text{biên})$$

→ thì $V_1 = V_2$ → phương trình Poisson – Laplace **có nghiệm duy nhất**

Một số phương pháp giải phương trình Poisson – Laplace

- Giải trực tiếp
- Phương pháp phân ly biến số
- **Phương pháp soi gương**
- **Phương pháp sai phân hữu hạn**
- Phương pháp phần tử hữu hạn



Phương pháp soi gương

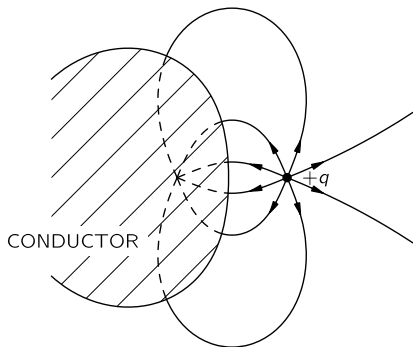
Bài toán và ý tưởng của phương pháp

- Một bài toán phổ biến: tính toán điện trường (điện thế) của một **hệ điện tích ở gần vật dẫn**
 - Vấn đề: do *hiện tượng điện hưởng*, phân bố điện tích trên bề mặt vật dẫn trở nên phức tạp $\rightarrow$ khó tính toán
 - Ý tưởng: vật dẫn là vật đẳng thế $\rightarrow$ bề mặt vật dẫn^a coi là đẳng thế
- $\rightarrow$ Có thể thay thế hệ điện tích – vật dẫn bằng một hệ điện tích tương đương để tính toán hơn
- Hệ điện tích tương đương gồm:
 - Hệ điện tích “thực” ban đầu của bài toán
 - Hệ điện tích “ảo” thay thế cho vật dẫn (phương pháp “soi gương”)
 - “Tương đương”: phương trình Poisson – Laplace có nghiệm duy nhất

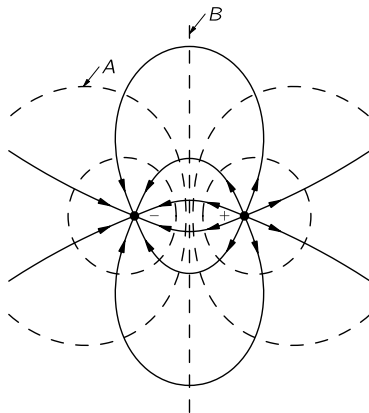
^aMột cách chặt chẽ phải nói là bề mặt *ngay dưới* lớp điện tích

Phương pháp soi gương

- Thay thế hệ điện tích – vật dẫn



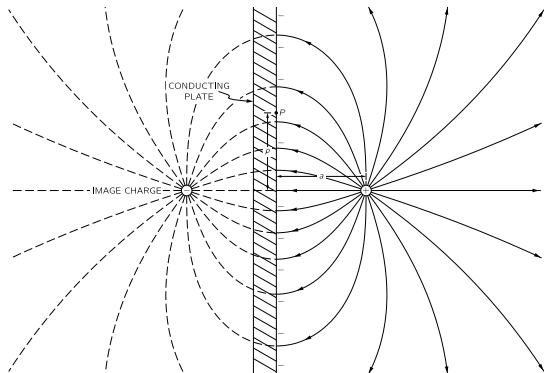
- Bằng hệ điện tích tương đương



Phương pháp soi gương

Điện trường của hệ điện tích điểm $+Q$ đặt gần một mặt dẫn rộng vô hạn

- Gắn mặt phẳng Oxy với mặt dẫn; điện tích điểm $+Q$ ở phía $z > 0$
- Lấy điện thế mặt dẫn làm mốc (coi như nối đất)
 $\rightarrow V_z(0) = 0 \text{ (V)}$
- Hệ điện tích tương đương gồm điện tích gốc $+Q$ và điện tích ảnh $-Q$ đối xứng với $+Q$ qua Oxy



Phương pháp soi gương

Điện trường của hệ điện tích điểm $+Q$ đặt gần một mặt dẫn rộng vô hạn

Chứng minh tương đương:

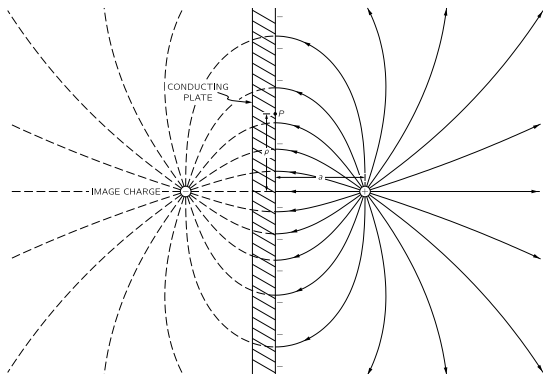
- Ở phía $z > 0$ chỉ có $+Q$
 $\rightarrow$ mật độ điện tích không đổi $\rightarrow \rho_1 = \rho_2$
 $\rightarrow \text{lapl}(V_1) = \text{lapl}(V_2)$

- Điều kiện biên: trên Oxy
 điện thế = 0 (V)

$$\rightarrow V_{1z}(0) = V_{2z}(0) = 0 \text{ (V)}$$

$\rightarrow$ Hai hệ tương đương

$\rightarrow$ Tại một điểm P (ở phía $z > 0$)



$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r^+} - \frac{Q}{r^-} \right)$$



Phương pháp sai phân hữu hạn

- Phương trình Laplace là phương trình đạo hàm riêng cấp hai (tạm xét trong hệ toạ độ Decartes cho một mặt phẳng):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

- Xấp xỉ phương trình vi phân thành phương trình sai phân:

- Từ định nghĩa đạo hàm: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta}$
- Với $\delta = h$ đủ nhỏ $\rightarrow$ xấp xỉ sai phân:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

- Sai phân cấp 2 (sai phân tiến và sai phân trung gian):

$$\begin{aligned} f'' &\approx \frac{\frac{f(x+h+h)-f(x+h)}{h} - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{h} \\ &= \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \end{aligned}$$



Phương pháp sai phân hữu hạn

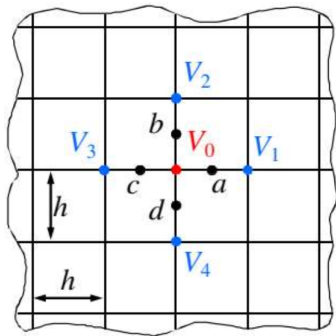
- Phương trình sai phân Laplace cho từng nút

$$\frac{V_1 + V_3 - 2V_0}{\Delta x^2} + \frac{V_2 + V_4 - 2V_0}{\Delta y^2} = 0$$

- Nếu tạm xét các lưới vuông

$$\Delta x = \Delta y \Rightarrow V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}$$

(Điện thế tại một điểm bằng trung bình điện thế 4 điểm lân cận)

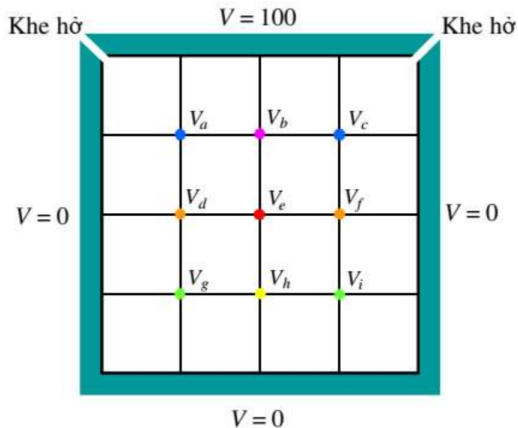




Phương pháp sai phân hữu hạn

- Một hệ có n nút $\rightarrow$ hệ phương trình n ẩn

$$\begin{aligned} V_a &= 0,25(100 + V_b + V_d + 0) \\ V_b &= 0,25(V_a + 100 + V_c + V_e) \\ V_c &= 0,25(V_b + 100 + 0 + V_f) \\ V_d &= 0,25(0 + V_a + V_e + V_g) \\ V_e &= 0,25(V_d + V_b + V_f + V_h) \\ V_f &= 0,25(V_e + V_c + 0 + V_i) \\ V_g &= 0,25(0 + V_d + V_h + 0) \\ V_h &= 0,25(V_g + V_e + V_i + 0) \\ V_i &= 0,25(V_h + V_f + 0 + 0) \end{aligned}$$



$\rightarrow$ Có thể giải bằng **phương pháp lặp** với dạng $x = f(x)$



Phương pháp sai phân hữu hạn

- Lập bảng lặp. Điện thế ở bước đầu tiên có thể “đoán”
- Lặp đến khi sai số lớn nhất nhỏ hơn một giá trị quy định (ví dụ 2%)

Điện thế (V)	Bước 1	Bước 2	Bước 3	...
V_a	70	56,25	52,5	...
V_b	75	73,75	65,625	...
V_c	70	56,25	52,5	...
V_d	50	36,25	31,25	...
V_e	55	50	42,5	...
V_f	50	36,25	31,25	...
V_g	20	18,75	15	...
V_h	25	23,75	21,875	...
V_i	20	18,75	15	...

Nội dung môn học

- Mở đầu
- 1 Giải tích vector
- 2 Điện trường tĩnh
- 3 Điện trường dừng**
- 4 Từ trường tĩnh
- 5 Trường điện từ biến thiên



Nội dung chương

3 Điện trường dừng

Cường độ dòng điện và vector mật độ dòng điện

- Điện trường tĩnh: điện trường của các điện tích đứng yên
 - **Điện trường dừng**: điện trường của các điện tích chuyển động *trong vật dẫn*
- **Dòng điện** là dòng dịch chuyển có hướng của các điện tích. Chiều của dòng điện là chiều dịch chuyển của các điện tích dương.
- Ta muốn xét mức độ biến thiên của điện tích → **cường độ dòng điện**

$$I = \frac{dq}{dt} \text{ (A)}$$

- Cường độ dòng điện là **đại lượng vô hướng**
- Để xét *hướng* và *mật độ điện tích dịch chuyển trong không gian* cần có đại lượng vector → **Vector mật độ dòng điện $\mathbf{J}$**



Cường độ dòng điện và vector mật độ dòng điện

- Vector mật độ dòng điện là mật độ điện tích dịch chuyển trong không gian $\rightarrow$ là **mật độ điện khối ρ_v** nhân với **vận tốc $\mathbf{v}$** :

$$\mathbf{J} = \rho_v \cdot \mathbf{v}$$

- Xét một tiết diện S của vật dẫn: cường độ dòng điện là **thông lượng của vector mật độ dòng điện** qua mặt S :

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

- Nếu mật độ là hằng số và có hướng vuông góc với mặt S :

$$I = J \cdot S$$

$$\Rightarrow \mathbf{J} = \frac{I}{S} \mathbf{a}$$



Cường độ dòng điện và vector mật độ dòng điện

- **Định luật bảo toàn điện tích:** tổng lượng điện tích dịch chuyển ra khỏi mặt kín S bằng lượng điện tích biến đổi trong khối V bao bởi mặt S

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{dq}{dt}$$

$$\text{với } q = \int_V \rho_v \cdot dv$$

$$\Rightarrow \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_v \cdot dv = \int_V \left(-\frac{\partial}{\partial t} \rho_v \right) \cdot dv$$

(Định lý Leibniz)

- Ứng dụng định lý Ostrogradsky – Gauss:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \text{div } \mathbf{J} \cdot dv$$

$$\Rightarrow \text{div } \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Điện trường dừng

- Điện tích dịch chuyển $\rightarrow$ có lực điện tác động $\rightarrow$ có điện trường
- Nếu $I = \text{const} \rightarrow$ điện trường dừng trong vật dẫn
- Quan hệ giữa điện trường dừng $\mathbf{E}_{\text{dừng}}$ và mật độ dòng điện $\mathbf{J}$
 - Dễ thấy quan hệ đồng biến $\mathbf{E}_{\text{dừng}} \uparrow \rightarrow \mathbf{F} \uparrow \rightarrow \mathbf{v} \uparrow \rightarrow \mathbf{J} \uparrow$
 - Nếu vật liệu là tuyến tính:

$$\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E}_{\text{dừng}} \quad \text{hoặc} \quad \mathbf{E}_{\text{dừng}} = \rho \cdot \mathbf{J}$$

Trong đó

σ (S/m): điện dẫn suất

ρ ($\Omega \cdot \text{m}$): điện trở suất

Hiệu điện thế trong điện trường dừng

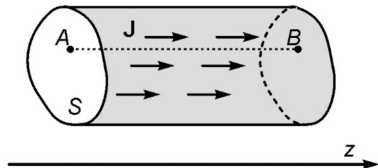
- Hiệu điện thế giữa 2 điểm A và B trong điện trường dừng:

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E}_{\text{dừng}} \cdot d\mathbf{l}$$

- Lưu ý: trong điện trường dừng, vật dẫn **không phải vật đẳng thế** (khác với điện trường tĩnh)
- Ví dụ: tính hiệu điện thế giữa 2 điểm dọc theo dây dẫn tiết diện S có dòng điện I

$$\mathbf{J} = \frac{I}{S} \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{E}_{\text{dừng}} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} = \frac{I}{\sigma \cdot S} \mathbf{a}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U_{AB} &= \int_A^B \mathbf{E}_{\text{dừng}} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_A^B \frac{I}{\sigma \cdot S} dz = \frac{I \cdot l_{AB}}{\sigma \cdot S} \end{aligned}$$



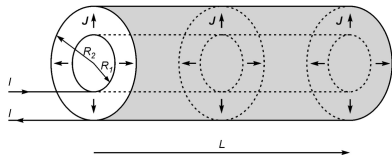
Hiệu điện thế trong điện trường dừng

- Ví dụ: cáp đồng trục gồm 2 dây dẫn hình trụ đồng trục, giữa 2 dây dẫn là lớp cách điện. Tuy nhiên, có thể có dòng điện “rò” chảy qua lớp cách điện. Tính hiệu điện thế giữa 2 mặt của lớp cách điện gây ra dòng rò.
- Coi dây dẫn có chiều dài L rất lớn so với các bán kính để tạm bỏ qua các hiệu ứng ở đầu dây
- Coi dòng điện $\mathbf{J}$ chỉ chảy qua lớp điện môi theo phương vuông góc với mặt bên của trụ đồng trục; với mỗi mặt S bán kính ρ , $J(\rho) = \text{const}$ (dòng điện rò toả đều các hướng dọc theo chiều dài L)

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_S J(\rho) \cdot d\mathbf{s} = J(\rho) \cdot S = J(\rho) \cdot 2\pi\rho L \Rightarrow \mathbf{J}(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho L} \mathbf{a}_\rho$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = \frac{I}{\sigma 2\pi\rho L} \mathbf{a}_\rho$$

$$\Rightarrow U_{AB} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{I}{\sigma 2\pi\rho L} d\rho = \frac{I}{\sigma 2\pi L} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



Nội dung môn học

- Mở đầu
- 1 Giải tích vector
- 2 Điện trường tĩnh
- 3 Điện trường dừng
- 4 Từ trường tĩnh**
- 5 Trường điện từ biến thiên

Nội dung chương

4

Từ trường tĩnh

- Lực từ, từ trường, và định luật Bio – Savart
- Định luật Ampère, độ tản và độ xoáy của $\mathbf{B}$
- Cường độ từ trường và từ thế vector
- Vật liệu từ và hệ số từ cảm
- Từ thông, điện cảm, cảm ứng từ
- Mạch từ



Nội dung chương

4

Từ trường tĩnh

- Lực từ, từ trường, và định luật Bio – Savart
- Định luật Ampère, độ tản và độ xoáy của $\mathbf{B}$
- Cường độ từ trường và từ thế vector
- Vật liệu từ và hệ số từ cảm
- Từ thông, điện cảm, cảm ứng từ
- Mạch từ



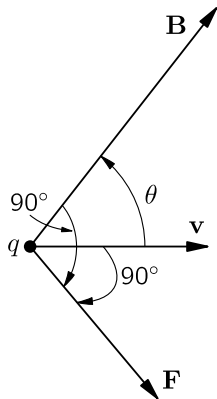
Lực từ và từ trường

- Thí nghiệm (của Ampère) cho thấy các dây dẫn mang dòng điện tác dụng lực lên nhau → Các **điện tích chuyển động** tác dụng lực lên nhau
- Lực này có phương vuông góc với một mặt phẳng chứa vector vận tốc $\mathbf{v}$

→ Có một trường do điện tích chuyển động (dòng điện) sinh ra tác dụng lực lên điện tích chuyển động (dòng điện) khác; → **từ trường**

- Đại lượng vector đặc trưng cho từ trường nằm trong mặt phẳng chứa vector $\mathbf{v}$ vuông góc với **lực từ $\mathbf{F}$**
- Tương tự như điện trường, từ trường có **vector cường độ từ trường $\mathbf{H}$** và **vector cảm ứng từ (mật độ từ thông) $\mathbf{B}$**

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$



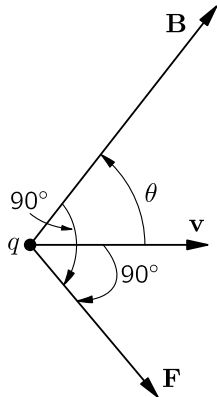


Lực Lorentz và định luật Bio – Savart

- Khi xét cả điện trường $\mathbf{E}$, lực $\mathbf{F}$ tác dụng lên điện tích chuyển động, gọi là *lực Lorentz*, gồm lực điện $\mathbf{F}_e$ và lực từ $\mathbf{F}_m$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Điện tích chuyển động tạo thành dòng điện $\rightarrow$ có thể xét quan hệ giữa $\mathbf{F}_m$, $\mathbf{B}$, và dòng điện. Đặt vector dòng điện $\mathbf{I} = I \cdot \mathbf{a}$.
- Mặt khác, xét đoạn dây dẫn vô cùng nhỏ dl có điện tích với mật độ điện dài ρ_l chuyển động với tốc độ v



$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\rho_l dl}{dt} = \rho_l \cdot v \Rightarrow dq \cdot \mathbf{v} = \rho_l \cdot v d\mathbf{l} = d\mathbf{I}$$

- $\rightarrow$ Lực từ tác dụng lên đoạn dây dl là
- $$d\mathbf{F}_m = dq \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} = d\mathbf{I} \times \mathbf{B} = I \cdot d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$



Lực Lorentz và định luật Bio – Savart

- Lực từ tác dụng lên đoạn dây $d\mathbf{l}$ là $d\mathbf{F}_m = d\mathbf{I} \times \mathbf{B} = I \cdot d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$
 - Mặt khác, thí nghiệm của Ampère cho thấy lực từ giữa 2 dòng điện có dạng giống lực tĩnh điện Coulomb: tỷ lệ thuận với dòng điện và tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách qua một hằng số.
- Lực từ giữa 2 đoạn dây vô cùng nhỏ $d\mathbf{l}_1$ và $d\mathbf{l}_2$ có I_1 và I_2 chạy qua:

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{I}_1 \times d\mathbf{I}_2 \times \mathbf{a}_{12}}{r^2}$$

với $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ (N/A}^2\text{)}$ là độ từ thẩm của chân không

- Từ trường do một đoạn dây $d\mathbf{l}$ có dòng điện I chạy qua:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot d\mathbf{l} \times \mathbf{a}}{r^2}$$

- Vector cảm ứng từ của một dây dẫn L (Định luật Bio – Savart)

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{a}}{r^2} \quad (\text{T})$$



Từ trường của một đoạn dây dẫn thẳng

- Xét từ trường của đoạn dây dẫn chiều dài L có dòng điện một chiều I tạo ra tại điểm P cách dây một khoảng ρ có vị trí tạo với đầu dây các góc θ_1 và θ_2

- Có $|\mathbf{dl} \times \mathbf{a}| = dl \cdot \sin \alpha = dl \cdot \cos \theta$

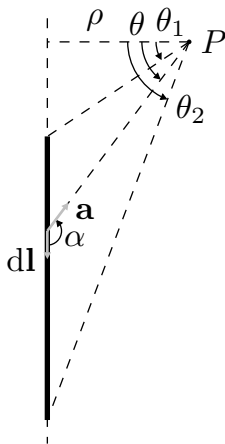
- Khoảng cách từ đoạn dl đến điểm P là: $r = \frac{\rho}{\cos \theta}$

- Một đoạn chiều dài trên dây

$$l = \rho \cdot \tan \theta \rightarrow dl = \frac{\rho}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\frac{\rho}{\cos^2 \theta} d\theta \cdot \cos \theta}{\frac{\rho^2}{\cos^2 \theta}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

→ Trong hệ tọa độ trụ $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \mathbf{a}_\phi$



Dây thẳng dài vô

hạn: $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{a}_\phi$

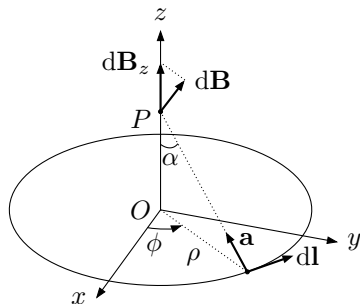


Từ trường của một vòng dây

- Xét từ trường của vòng dây bán kính ρ mang dòng điện một chiều I gây ra tại một điểm P nằm trên trục đối xứng cách vòng dây một khoảng z
- Có $|d\mathbf{l} \times \mathbf{a}| = \rho \cdot d\phi \cdot \sin \pi/2 = \rho \cdot d\phi$
- Từ trường do đoạn $d\mathbf{l}$ sinh ra: $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\rho \cdot d\phi}{z^2 + \rho^2}$
- Do đối xứng, từ trường tổng là xếp chồng hình chiếu của $d\mathbf{B}$ trên trục đối xứng

$$dB_z = dB \cdot \sin \alpha = dB \cdot \frac{\rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\rho^2}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{\rho^2}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \end{aligned}$$





Nội dung chương

4

Từ trường tĩnh

- Lực từ, từ trường, và định luật Bio – Savart
- Định luật Ampère, độ dẫn và độ xoáy của $\mathbf{B}$
- Cường độ từ trường và từ thế vector
- Vật liệu từ và hệ số từ cảm
- Từ thông, điện cảm, cảm ứng từ
- Mạch từ

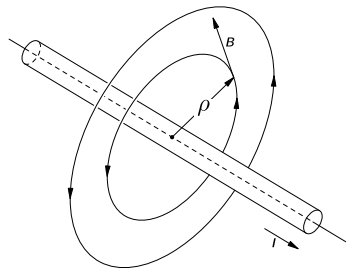


Định luật Ampère

- Xét đường khép kín P là một đường tròn bán kính ρ bao quanh một dây dẫn thẳng dài vô hạn có dòng điện I chạy qua
- Từ trường quanh dây dẫn: $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$
- Xét lưu số của $\mathbf{B}$ theo đường khép kín P :

$$\oint_P \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_P \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \rho \cdot d\phi$$

$$\Rightarrow \oint_P \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$



- Kết quả này có thể tổng quát hoá cho đường khép kín P bất kỳ và phân bố dòng điện bất kỳ $\rightarrow$ **Định luật Ampère** (tương tự định luật Gauss)

$$\oint_P \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_{\text{trong}}$$



Định luật Ampère

Ứng dụng định luật Ampère tính mật độ từ thông của

- Dây dẫn thẳng dài vô hạn (tính lại)
- Cuộn dây quấn n vòng quanh ống dây thẳng
- Cuộn dây quấn n vòng quanh vòng xuyên



Độ tản và độ xoáy của trường vector mật độ từ thông

Độ tản của cảm ứng từ

- Độ tản của $\mathbf{B}$ quanh dây dẫn thẳng dài vô hạn

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

- Có thể tổng quát hoá cho mọi hệ: $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$
- Từ trường không tản → không có nguồn từ tích điểm

Độ xoáy của cảm ứng từ

- Từ định luật Ampère $\oint_P \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_{\text{trong}}$ với $\sum I_{\text{trong}} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$ với mặt S có biên là đường khép kín P ; áp dụng định lý Stoke:

$$\oint_P \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot}(\mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} \Rightarrow \operatorname{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \mathbf{J}$$



Nội dung chương

4

Từ trường tĩnh

- Lực từ, từ trường, và định luật Bio – Savart
- Định luật Ampère, độ tản và độ xoáy của $\mathbf{B}$
- **Cường độ từ trường và từ thế vector**
- Vật liệu từ và hệ số từ cảm
- Từ thông, điện cảm, cảm ứng từ
- Mạch từ



Vector cường độ từ trường $\mathbf{H}$

- Tương tự điện trường, ta có thể định nghĩa vector cường độ từ trường trong mối quan hệ với vector cảm ứng từ:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \quad (\text{A/m})$$

→ Sự tương tự giữa điện và từ:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

→ Sự tương tự về nguồn gốc và tính chất của các trường *tĩnh/dòng*

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \sum Q_{\text{trong}} \leftrightarrow \oint_P \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_{\text{trong}}$$

$$\oint_P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \leftrightarrow \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$



Vector từ thế $\mathbf{A}$

- Từ tính chất từ trường không tản: $\text{div } \mathbf{B} = 0$
- Nhắc lại định lý về độ xoáy của một trường ống (không tản):

$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \mathbf{A}) = 0 \rightarrow$ Nếu $\text{div } \mathbf{B} = 0$ thì tồn tại một trường vector $\mathbf{A}$ sao cho $\mathbf{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \mathbf{A}$

$\rightarrow$ Có thể định nghĩa **vector từ thế $\mathbf{A}$** :

$$\mathbf{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \mathbf{A}$$

$$\text{div } \mathbf{A} = 0$$

- Xét độ xoáy của $\mathbf{B}$ (theo ký hiệu ∇ cho tiện)

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \cdot \mathbf{A}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \mathbf{B} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \mathbf{A}) - \text{lapl } \mathbf{A} \Rightarrow \text{lapl } \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$



Nội dung chương

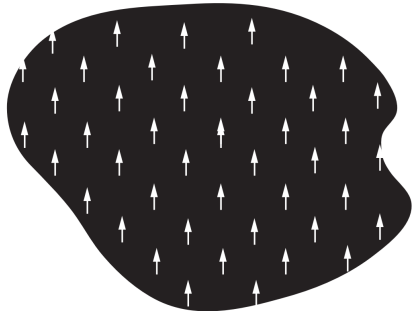
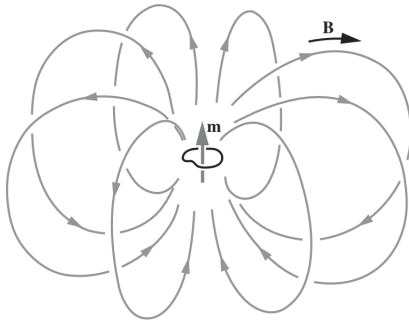
4

Từ trường tĩnh

- Lực từ, từ trường, và định luật Bio – Savart
- Định luật Ampère, độ tản và độ xoáy của $\mathbf{B}$
- Cường độ từ trường và từ thế vector
- **Vật liệu từ và hệ số từ cảm**
- Từ thông, điện cảm, cảm ứng từ
- Mạch từ

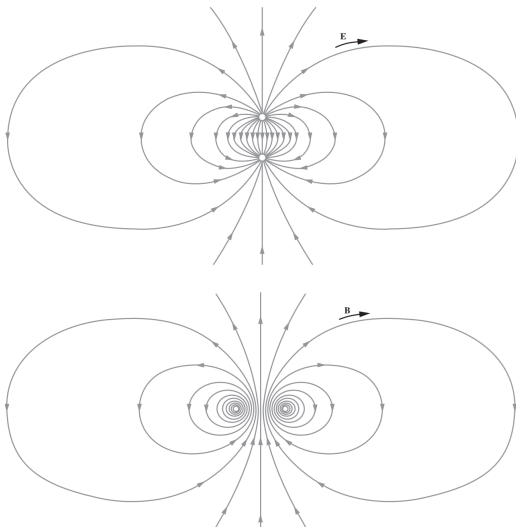
Vật liệu từ và hệ số từ cảm

- Các vật liệu được cấu tạo từ các nguyên tử. Các điện tích trong nguyên tử chuyển động tạo thành các dòng điện nguyên tử có thể đơn giản hoá thành dòng chạy trong vòng kín.
- Có từ trường của dòng điện chạy trong một vòng kín → **Lưỡng cực từ**
- Trong một số vật liệu, các lưỡng cực từ có moment khá lớn và dễ được sắp xếp lại khi đặt trong một từ trường ngoài → bị **từ hoá**



Vật liệu từ và hệ số từ cảm

- Sự tương đồng giữa lưỡng cực từ và lưỡng cực điện



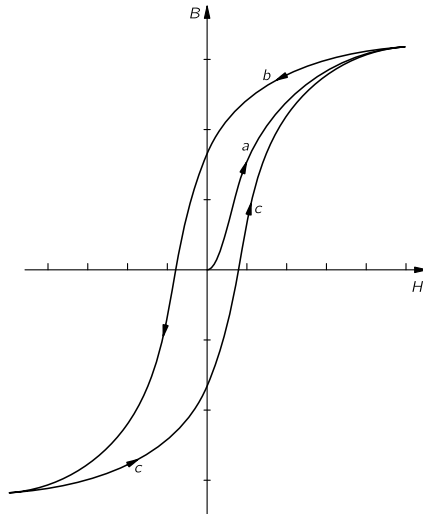


Vật liệu từ và hệ số từ cảm

- Xét vật liệu từ khi bị từ hoá có moment lưỡng cực từ tổng $\mathbf{m}$.
- Moment lưỡng cực trên một đơn vị thể tích có thể đặc trưng cho khả năng bị từ hoá của vật liệu
- Vector từ hoá (mật độ lưỡng cực từ) $\mathbf{M} = \frac{\mathbf{m}}{V}$ (A/m)
có cùng thứ nguyên với vector cường độ từ trường $\mathbf{H}$
- Mật độ từ thông trong vật liệu: $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$
- Xét vật liệu đẳng hướng $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$
trong đó
 - μ_r là hệ số từ thẩm tương đối
 - μ là hệ số từ thẩm tuyệt đối
 - χ_m là hệ số từ cảmcủa vật liệu
- Trong vật liệu từ thực tế, các hệ số này có tính phi tuyến cao

Vật liệu từ và hệ số từ cảm

- Đường đặc tính từ trễ $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ của vật liệu





Nội dung chương

4

Từ trường tĩnh

- Lực từ, từ trường, và định luật Bio – Savart
- Định luật Ampère, độ tản và độ xoáy của $\mathbf{B}$
- Cường độ từ trường và từ thế vector
- Vật liệu từ và hệ số từ cảm
- Từ thông, điện cảm, cảm ứng từ
- Mạch từ



Từ thông và điện cảm

- Thông lượng của cảm ứng từ **B** qua một mặt S bất kỳ gọi là **từ thông**

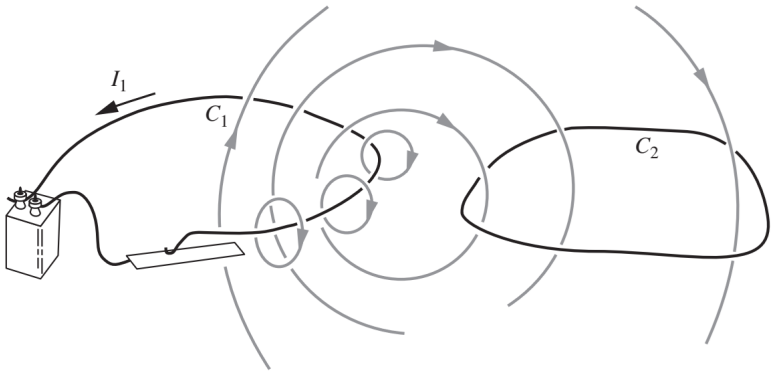
$$\psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{Wb})$$

- Tính từ thông chuyển qua:
 - Khung dây đặt cạnh dây dẫn dài vô hạn mang dòng điện I
 - Cuộn dây dài vô hạn mang dòng điện I quấn quanh trụ bán kính R (từ thông trên một đơn vị chiều dài)
 - Cuộn dây mang dòng điện I quấn N vòng theo vòng xuyên bán kính ρ với ống dây bán kính a
- Tỷ lệ giữa dòng điện trong cuộn dây và từ thông sinh ra gọi là **điện cảm**
 - Điện cảm tự cảm: $L = \frac{\psi_{\text{tự cảm}}}{I_{\text{cuộn đó}}} \quad (\text{H})$
 - Điện cảm hỗ cảm: $M = \frac{\psi_{\text{hỗ cảm}}}{I_{\text{cuộn khác}}} \quad (\text{H})$

Từ thông và điện cảm

- Tỷ lệ giữa dòng điện trong cuộn dây và từ thông sinh ra gọi là **điện cảm**

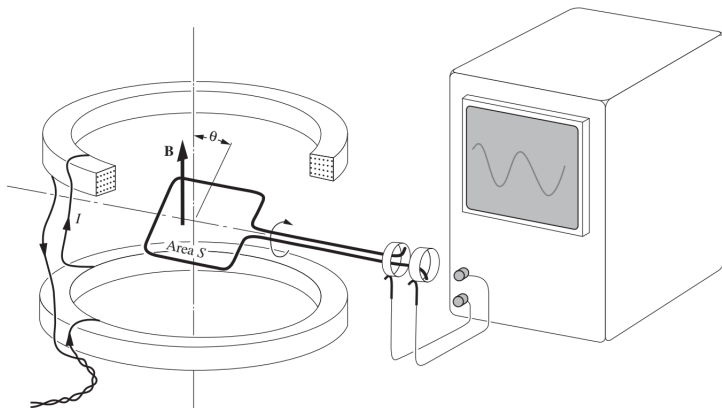
- Điện cảm tự cảm: $L = \frac{\psi_{\text{tự cảm}}}{I_{\text{cuộn đó}}} \text{ (H)}$
- Điện cảm hỗ cảm: $M = \frac{\psi_{\text{hỗ cảm}}}{I_{\text{cuộn khác}}} \text{ (H)}$



Định luật cảm ứng điện từ

- Từ trường biến thiên sinh ra **sức điện động cảm ứng**

$$e = -\frac{d\psi}{dt}$$





Lực từ tác dụng lên dòng điện

- Lực Lorentz (điện và từ): $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

→ Xét lực từ nguyên tố tác động lên dòng điện nguyên tố dI là dòng điện tích nguyên tố dq chuyển động

$$d\mathbf{F} = dq \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- Mặt khác $dq = \rho_v \cdot dv$

$$\Rightarrow d\mathbf{F} = \rho_v \cdot dv \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \rho_v \cdot \mathbf{v} \cdot dv \times \mathbf{B}$$

- Mà $\rho_v \cdot \mathbf{v} = \mathbf{J}$ và $\mathbf{J} \cdot dv = \mathbf{J} \cdot s dl = I \cdot dl$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = I \cdot dl \times \mathbf{B} = -I \cdot \mathbf{B} \times dl$$

→ Lực từ tác dụng lên đoạn dây dẫn AB

$$\mathbf{F} = -I \int_A^B \mathbf{B} \times d\mathbf{l}$$



Nội dung chương

4

Từ trường tĩnh

- Lực từ, từ trường, và định luật Bio – Savart
- Định luật Ampère, độ tản và độ xoáy của $\mathbf{B}$
- Cường độ từ trường và từ thế vector
- Vật liệu từ và hệ số từ cảm
- Từ thông, điện cảm, cảm ứng từ
- Mạch từ



Mạch từ

- Trong kỹ thuật, ta thường gặp bài toán tính $\mathbf{B}$ và $\mathbf{H}$ trong vật liệu từ do cuộn dây mang dòng điện sinh ra $\rightarrow$ sẽ thuận tiện khi dùng khái niệm “mạch từ”
- Có thể áp dụng các kỹ thuật giải mạch điện để giải mạch từ $\rightarrow$ xây dựng các khái niệm của mạch từ tương đương mạch điện
- Ta có mối quan hệ điện thế và cường độ điện trường: $\mathbf{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$
- $\rightarrow$ Có thể định nghĩa từ thế vô hướng: $\mathbf{H} = -\overrightarrow{\text{grad}} V_m$
- Điện áp giữa 2 điểm A và B là $V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$
- $\rightarrow$ “Từ áp” trong mạch từ: $V_{mAB} = \int_A^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$
- Quan hệ giữa mật độ dòng điện và cường độ điện trường: $\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E}$
- $\rightarrow$ Tương tự với mật độ từ thông và cường độ từ trường: $\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H}$
- Dòng điện là thông lượng của $\mathbf{J}$ qua mặt S : $I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$
- $\rightarrow$ Tương tự từ thông là thông lượng của $\mathbf{B}$ qua mặt S : $\psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$



Mạch từ

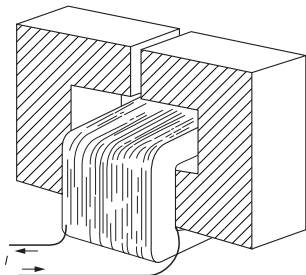
- Khái niệm điện trở trong mạch điện: $R = \frac{U}{I}$
- Khái niệm “từ trở” trong mạch từ: $R_m = \frac{V_m}{\psi}$
- Điện trở của đoạn dây dẫn tiết diện S chiều dài d là: $R = \frac{d}{\sigma S}$
- Tương tự từ trở của đoạn vật liệu từ tiết diện S chiều dài d là: $R_m = \frac{d}{\mu S}$
- Do bảo toàn điện tích, ta có định luật Kirchhoff 1 cho dòng điện:

$$\sum_{\text{nút}} I = 0$$
- Tương tự với mạch từ: $\sum_{\text{nút}} \psi = 0$
- Theo định luật Ampère: $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$
- Trong mạch từ với cuộn dây N vòng: $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = N \cdot I$

Mạch từ

- Xét mạch từ gồm một nam châm điện có dòng điện một chiều I chạy qua N vòng dây cuốn quanh gông từ có khe hở không khí
- Gông từ làm bằng vật liệu từ có độ từ thẩm $\mu = \mu_r \mu_0$. Khe hở không khí coi là chân không có độ từ thẩm μ_0 . Gông từ có tiết diện đều A và chiều dài tác dụng l . Khe hở không khí có chiều dài g
- Xét vật liệu từ có μ_r rất lớn $\rightarrow$ coi như không có từ thông tản $\rightarrow$ từ thông ψ chỉ chạy trong mạch từ
- Tiết diện A đều $\rightarrow B = \frac{\psi}{A} = \text{const}$
- Trong gông từ: $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}_f$
- Trong khe hở không khí: $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}_a$
- Trong mạch từ $\mathbf{H}$ chạy dọc theo chiều dài

$$\Rightarrow \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_f \cdot l + H_a \cdot g = N \cdot I$$





Mạch từ

Mạch từ có nhiều nhánh

- Từ thông trong mỗi nhánh chưa biết $\rightarrow$ là ẩn cần tìm
- Tại mỗi nút: $\sum_{\text{nút}} \psi = 0$
- Theo mỗi vòng: $\sum_{\text{vòng}} H_i \cdot l_i = \sum N_k \cdot I_k$

trong đó vòng có i nhánh và k cuộn dây (chú ý chiều cuộn dây)

- Quy tắc xác định số phương trình:
 - Bao nhiêu ẩn cần bấy nhiêu phương trình
 - $\rightarrow$ tổng số phương trình = số nhánh
 - Có n nút lập được $n - 1$ phương trình độc lập tuyến tính theo nút
 - $\rightarrow$ Số phương trình theo vòng = (số nhánh) - (số nút) + 1

Nội dung môn học

- Mở đầu
- 1 Giải tích vector
- 2 Điện trường tĩnh
- 3 Điện trường dừng
- 4 Từ trường tĩnh
- 5 Trường điện từ biến thiên

Nội dung chương

- 5 Trường điện từ biến thiên
 - Định luật Faraday
 - Dòng điện dịch
 - Hệ phương trình Maxwell – Heaviside và sóng phẳng



Nội dung chương

- 5 Trường điện từ biến thiên
 - Định luật Faraday
 - Dòng điện dịch
 - Hệ phương trình Maxwell – Heaviside và sóng phẳng



Định luật Faraday

- Ta đã xét điện trường và từ trường một cách độc lập
- Xét quan hệ điện và từ trong trường điện từ là một thể thống nhất

Định luật Faraday: Từ trường biến thiên sinh ra điện trường xoáy

- Từ thông biến thiên sinh ra sức điện động cảm ứng: $e = -\frac{d\psi}{dt}$
- Xét đường khép kín P là đường bao của mặt S :

$$e = \oint_P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \text{ và } \psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

- Theo định lý Stokes: $\oint_P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \overrightarrow{\text{rot}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$

$$\Rightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \right) = \int_S \overrightarrow{\text{rot}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$



Nội dung chương

- 5 Trường điện từ biến thiên
 - Định luật Faraday
 - Dòng điện dịch
 - Hệ phương trình Maxwell – Heaviside và sóng phẳng



Dòng điện dịch

“Còn thiếu cái gì đó”

- Ta có độ tản của mật độ dòng điện: $\text{div } \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$
 - Và độ xoáy của cường độ từ trường **tĩnh**: $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$
 - Mà độ tản của độ xoáy luôn bằng không: $\text{div}(\text{rot } \mathbf{H}) = 0$
- Mật độ điện tích luôn không đổi: $\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$
- Chỉ đúng trong điện trường tĩnh và **SAI khi điện tích chuyển động**
- Trong trường điện từ biến thiên, ngoài dòng điện chạy trong vật dẫn (**dòng điện dẫn**), còn có “cái gì đó” sinh ra từ trường xoáy
- Gọi là **“dòng điện dịch”** (vì phải có cùng thứ nguyên với dòng điện)

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{dẫn}} + \mathbf{J}_{\text{dịch}}$$

Dòng điện dịch

“Còn thiếu cái gì đó”: Góc nhìn khác

- Xét một tụ điện đang xả dòng điện qua điện trở. Đường khép kín C bao quanh mặt S cắt qua dây dẫn. Theo định luật Ampère và định lý Stokes:

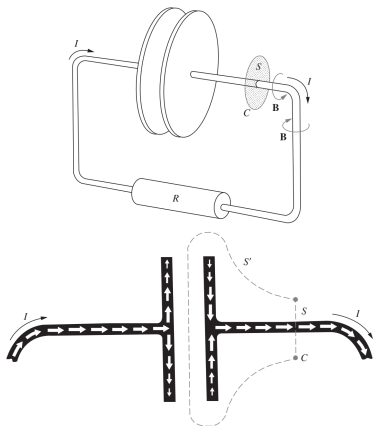
$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

- Nhưng nếu xét mặt S' cũng căng trên đường khép kín C không cắt qua dây dẫn mà cắt qua phần không gian giữa 2 bản tụ điện thì

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S'} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

vì không có dòng điện dẫn trong điện môi đi qua mặt S'

- Phải có dòng điện dịch trong điện môi / chân không





Dòng điện dịch

$$\vec{\text{rot}} \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{dẫn}} + \mathbf{J}_{\text{dịch}} \Rightarrow \text{div}(\vec{\text{rot}} \mathbf{H}) = \text{div}(\mathbf{J}_{\text{dẫn}} + \mathbf{J}_{\text{dịch}}) = 0$$

$$\Rightarrow \text{div}(\mathbf{J}_{\text{dẫn}}) = -\text{div}(\mathbf{J}_{\text{dịch}}) \Rightarrow \text{div}(\mathbf{J}_{\text{dịch}}) = \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

• Mà $\rho_v = \text{div} \mathbf{D}$

$$\Rightarrow \text{div}(\mathbf{J}_{\text{dịch}}) = \frac{\partial}{\partial t}(\text{div} \mathbf{D}) = \text{div}\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}_{\text{dịch}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\text{rot}} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

→ Dòng điện dịch là điện trường biến thiên trong điện môi / chân không

→ Mở rộng định luật Ampère với đường L là biên của mặt S :

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{dẫn}} + I_{\text{dịch}} = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$



Nội dung chương

- 5 Trường điện từ biến thiên
 - Định luật Faraday
 - Dòng điện dịch
 - Hệ phương trình Maxwell – Heaviside và sóng phẳng



Vật lý cổ điển

Hệ phương trình Maxwell – Heaviside

Dạng vi phân

$$\vec{\text{rot}} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\text{rot}} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho_v$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0$$

Dạng tích phân

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho_v \cdot dv$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

- Bảo toàn điện tích: $\text{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$
- Định luật 2 Newton: $\mathbf{F} = \frac{d(m \cdot \mathbf{v})}{dt}$
- Lực Lorentz: $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$
- Lực hấp dẫn: $\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{a}_{12}$



Sóng phẳng

Hệ phương trình Maxwell – Heaviside trong chân không

- Trong chân không và không có điện tích tự do

$$\vec{\text{rot}} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\vec{\text{rot}} \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\text{div} \mathbf{E} = 0$$

$$\text{div} \mathbf{H} = 0$$

- Nếu điện trường dao động điều hoà (gắn $\mathbf{E}$ với phương trục z)

$$\mathbf{E} = E \cos(\omega t - k \cdot y) \cdot \mathbf{a}_z$$

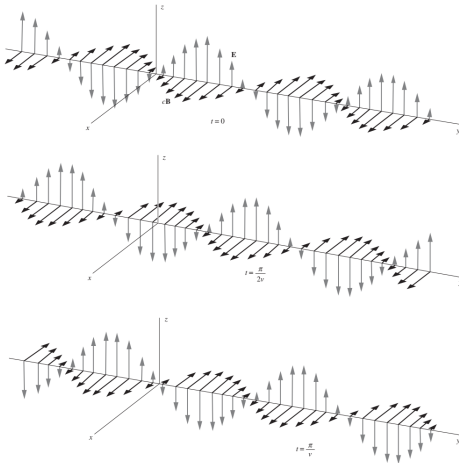
→ Từ trường cũng dao động điều hoà vuông góc với điện trường (trục x)

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E \cos(\omega t - k \cdot y) \cdot \mathbf{a}_x$$

→ Tạo thành sóng điện từ lan truyền theo phương y

Sóng phẳng

- Tốc độ lan truyền sóng: $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$ (tốc độ ánh sáng)



- Theo lịch sử phát triển lý thuyết trường điện từ, các hằng số ϵ_0 và μ_0 có trước
- Maxwell giải hệ phương trình trường điện từ trong chân không ra được kết quả sóng điện từ lan truyền với tốc độ $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$
- “Tình cờ” giá trị này đúng bằng tốc độ ánh sáng (được đo một cách độc lập)
- Đưa ra nhận định ánh sáng là sóng điện từ
- Cách tiếp cận khác: Điện trường tĩnh hành xử với hằng số ϵ_0 . Điện tích chuyển động sinh ra từ trường.
- Mặt khác, theo thuyết tương đối hẹp của Einstein, phương trình chuyển động của vật có chứa tham số tốc độ ánh sáng c
- Từ đó tính ra $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$

(Tham khảo sách [Purcell 2013])